This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

QA
152
.R53

113670

42

44

Anfangsgründe
der
Algebra
nebst einer
Sammlung von Beispielen zusammengesetzter Aufgaben
aus der
praktischen Rechenkunst
zur
Übung der algebraischen Auflösungskunst
zum
Gebrauche für Lehrer und zum Selbstunterrichte für Schüler, die mit der gewöhnlichen Rechenkunst vertraut sind

von
J. A. L. Richter,
Conrector an der Herzogl. Hauptschule in Dessau.

Zweiter Theil.

Dessau 1825.
Bei Chr. Georg Ackermann.

QA
152
R53

Herrn

Gerhard Ulrich Anton Vieth

Herzogl. Anhalt-Deßauischem Schulrathe
und Professor der Mathematik,

seinem

Hochverehrten Lehrer

widmet dieses Werk

hochachtungsvoll und als geringen Beweis seiner
Dankbarkeit

der Verfasser.

Seite

Zweites Kapitel. Von den Gleichungen der höheren Grade.

a) Der Binomische Lehrsatz 247

b) Von der Zusammensetzung der höheren Gleichungen aus einfachen Wurzelgleichungen 267

c) Von der Auflösung der höheren Gleichungen . . 303

d) Von der Auffindung der Wurzeln durch Näherung 325

Drittes Kapitel. Von den unbestimmten Gleichungen . . 336

Zweiter Theil.

Fünfter Abschnitt.

Auflösung der höheren Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Von höheren Gleichungen überhaupt und denen des zweiten Grades insbesondere.

§. 1.

Im ersten Theile §. 224. haben wir uns schon mit dem Begriffe einer höheren Gleichung bekannt gemacht. Wir fanden, daß jede Gleichung eine höhere genannt werde, sobald die unbekannte Größe in einer höheren Potenz, als der ersten, in derselben vorkommt, so daß durch keine Veränderungen der Gleichung dieser höhere Grad weggeschafft werden kann. Der Grad der Gleichung wird durch den Exponenten der höchsten Potenz, in der die unbekannte Größe steht, bestimmt, und so gibt es denn Gleichungen des zweiten, dritten, vierten Grades u. s. w., die man auch quadratische, kubische, biquadratische nennt. Es ist sehr wohl möglich, daß die erste Gestalt einer Gleichung von der Art sein kann, daß die unbekannte Größe in derselben in einer höheren Potenz vorkommt, ohne daß sie doch zu den höheren Gleichungen gehört, wenn nämlich dieser höhere Grad sich wegschaffen läßt, so daß das Unbekannte nur im ersten Grade stehen bleibt. Hat man z. B. die Gleichung $ax^2 - bx = cx$, so kann man durchaus mit x dividiren und erhält also $ax - b = c$, folglich eine Gleichung des ersten Grades. Eben so wird die Gleichung $x^2 + bx - c = x^2 + d$ durch Subtraktion der Größe x^2 in die des ersten Grades $bx - c = d$ verwandelt.

QA
152
R53

Herrn

Gerhard Ulrich Anton Vieth

Herzogl. Anhalt-Deßauischem Schulrathe
und Professor der Mathematik,

seinem

Hochverehrten Lehrer

widmet dieses Werk

hochachtungsvoll und als geringen Beweis seiner
Dankbarkeit

der Verfasser.

Hist. of Sci.
Geibel
9-24-30
22354

Inhaltsanzeige.

Zweiter Theil.

Fünfter Abschnitt.

Auflösung der höheren Gleichungen.

Seite

Erstes Kapitel. Von höheren Gleichungen überhaupt und denen des zweiten Grades insbesondere.

a) Allgemeine Übersicht der höheren Gleichungen . . 1
b) Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen . 6
c) Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen 12
d) Beispiele dazu 17
e) Auflösung einiger Fälle aus der Gesellschaftsrechnung 128
f) Auflösung der bei arithmetischen Progressionen vorkommenden Fälle 135
g) Auflösung der bei geometrischen Progressionen vorkommenden Fälle 145
h) Anwendungen auf die zusammengesetzte Zinsrechnung 154
i) Rechnung, wenn das Kapital nicht bloß durch die Zinsen, sondern auch durch jährlich hinzugefügte neue Kapitale vermehrt wird 168
k) Rechnung, wenn eine Schuld durch terminweise Zahlungen getilgt werden soll 176
l) über den gegenwärtigen Werth einer nach n Jahren zu zahlenden Summe und Vergleichung verschiedener Gebote 182
m) Berechnung der Zeitrenten 191
n) Von der Leibrentenrechnung 215

2-13-39 HCM.
HCM

Seite

Zweites Kapitel. Von den Gleichungen der höheren Grade.

a) Der Binomische Lehrsatz 247

b) Von der Zusammensetzung der höheren Gleichungen aus einfachen Wurzelgleichungen 267

c) Von der Auflösung der höheren Gleichungen . . 303

d) Von der Auffindung der Wurzeln durch Näherung 325

Drittes Kapitel. Von den unbestimmten Gleichungen . 336

Zweiter Theil.

Fünfter Abschnitt.

Auflösung der höheren Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Von höheren Gleichungen überhaupt und denen des zweiten Grades insbesondere.

§. 1.

Im ersten Theile §. 224. haben wir uns schon mit dem Begriffe einer höheren Gleichung bekannt gemacht. Wir fanden, daß jede Gleichung eine höhere genannt werde, sobald die unbekannte Größe in einer höheren Potenz, als der ersten, in derselben vorkommt, so daß durch keine Veränderungen der Gleichung dieser höhere Grad weggeschafft werden kann. Der Grad der Gleichung wird durch den Exponenten der höchsten Potenz, in der die unbekannte Größe steht, bestimmt, und so gibt es denn Gleichungen des zweiten, dritten, vierten Grades u. s. w., die man auch quadratische, kubische, biquadratische nennt. Es ist sehr wohl möglich, daß die erste Gestalt einer Gleichung von der Art sein kann, daß die unbekannte Größe in derselben in einer höheren Potenz vorkommt, ohne daß sie doch zu den höheren Gleichungen gehört, wenn nämlich dieser höhere Grad sich wegschaffen läßt, so daß das Unbekannte nur im ersten Grade stehen bleibt. Hat man z. B. die Gleichung $ax^2 - bx = cx$, so kann man durchaus mit x dividiren und erhält also $ax - b = c$, folglich eine Gleichung des ersten Grades. Eben so wird die Gleichung $x^2 + bx - c = x^2 + d$ durch Subtraktion der Größe x^2 in die des ersten Grades $bx - c = d$ verwandelt.

§. 2.

Die Gleichungen der höheren Grade sind entweder reine oder gemischte. Unter den ersteren versteht man diejenigen, welche bloß die höhere Potenz der unbekannten Größe und keine niedere derselben enthalten, z. B. $ax^2 - b = cx^2$ ist eine reine quadratische Gleichung, $x^3 + b = ax^3 - c$ eine reine kubische, $ax^4 - m = q$ eine reine vom vierten Grade, u. s. w.

Gemischte höhere Gleichungen sind dagegen solche, welche die unbekannte Größe nicht bloß in der Potenz eines höheren Grades, sondern auch noch in niederen Graden enthalten, z. B. $ax^2 + bx = c$ ist eine gemischte quadratische, $ax^3 - cx = bx^2 + d$ eine gemischte kubische, $mx^4 - bx^2 = a - cx$ eine gemischte vom vierten Grade.

§. 3.

Die gemischten Gleichungen sind entweder vollständige oder unvollständige. Vollständig ist eine solche Gleichung, wenn nach der höchsten Potenz der unbekannten Größe auch alle folgende niedere bis auf die erste in derselben vorkommen, so daß die Exponenten dieser Potenzen immer um 1 niedriger werden. Solche vollständige Gleichungen sind z. B.

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 = dx + e,$$

oder $$x^6 - ax^5 + bx^4 - cx^3 = ex^2 + dx - f.$$

Gewöhnlich stellt man die höheren Gleichungen unter der Form einer vernichteten (Th. I. §. 215.) vor, indem man alle Glieder auf Eine Seite bringt, so daß auf der andern bloß 0 zu stehen kommt. Die obigen Gleichungen würden also zu folgenden vernichteten werden: $ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0$,

und $x^6 - ax^5 + bx^4 - cx^3 - ex^2 - dx + f = 0$.

Die bekannten Größen, welche x nicht mehr enthalten, kann man sich mit x^0 multiplizirt vorstellen, weil $x^0 = 1$ ist. Es gehen also eigentlich die Potenzen der unbekannten Größe bis zur 0ten hinab, so daß man jede höhere Gleichung unter der allgemeinen Form darstellen kann:

$$\mp x^m \mp bx^{m-1} \mp cx^{m-2} \mp dx^{m-3} \mp ex^{m-4} \ldots \mp fx^{m-m} = 0.$$

Ist $m = 4$, so wird sie in folgende verwandelt:

$$\mp x^4 \mp bx^{4-1} \mp cx^{4-2} \mp dx^{4-3} \mp ex^{4-4} = 0,$$

d. h. in $$\mp x^4 + bx^3 \mp cx^2 + dx + e = 0.$$

Man könnte zwar denken, daß die Reihe der Glieder auch nach x^{m-m} oder x^0 noch weiter fortgehen, daß also noch

mehrere Glieder von der Form $x^{m-(m+1)}$, $x^{m-(m+2)}$ u. s. w. $= x^{m-m-1}$, $x^{m-m-2} = x^{-1}$, x^{-2} u. s. w. folgen könnten, aber diese Potenzen, wie wir unten sehen werden, sind auch höhere Potenzen und fallen mit den vorhergehenden in eine Kategorie, so daß also x^0 immer das letzte Glied der Reihe ist.

Bei unvollständigen Gleichungen folgen die Potenzen der unbekannten Größe nicht der Reihe nach auf einander, sondern es fehlen mehr oder weniger Zwischenglieder. So sind z. B. die Gleichungen $x^3 - bx = c$, oder $x^5 + bx^2 - cx = d$ unvollständige Gleichungen vom dritten und fünften Grade. Solche Gleichungen entstehen, wenn die Koeffizienten einiger Glieder $= 0$ werden, denn dadurch verschwinden diese Glieder selbst, weil jedes Produkt, das einen Faktor $= 0$ hat, selbst $= 0$ wird. Es gehören also auch die unvollständigen Gleichungen unter die allgemeine Form, und es ist z. B. $x^3 - bx = c$ oder $x^3 - bx - c = 0 = x^3 + 0x^2 - bx - c = 0$, und $x^5 + bx^2 - cx = d$ oder $x^5 + bx^2 - cx - d = 0 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + bx^2 - cx - d = 0$.

Auch die reinen Gleichungen gehören zu den unvollständigen, weil in denselben alle niedern Potenzen fehlen, außer der 0ten, denn es ist z. B. $ax^2 + b = 0$, so viel als $ax^2 + 0x^1 + bx^0 = 0$ und $ax^3 + b - c = 0 = ax^3 + 0x^2 + 0x + bx^0 - cx^0 = 0$, woraus man sieht, daß auch die reinen Gleichungen unter der allgemeinen Form mit begriffen sind. Man betrachtet sie aber besonders, weil sie nach Art der Gleichungen vom ersten Grade auf ganz einfache Art sich auflösen lassen.

§. 4.

Die Gleichungen, in welchen die unbekannte Größe in Potenzen mit gebrochnen oder negativen Exponenten vorkommt, gehören ebenfalls zu den höheren Gleichungen. Die gebrochenen Exponenten sind nur andere Ausdrücke für die Wurzelzeichen; wenn man also nach Th. I. §. 226. die Wurzelzeichen wegschafft, so erhält man eine Gleichung, worin lauter höhere Potenzen, als vom 0ten Grade vorkommen. Ist z. B. die Gleichung gegeben $x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} - c = 0$, so ist diese so viel als

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - c = 0, \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{x} = c - \sqrt{x}.$$

Erhebt man auf beiden Seiten zum Kubus, so erhält man

$$x = c^3 - 3c^2\sqrt{x} + 3cx - x\sqrt{x},$$

oder

$$x - 3cx - c^3 = -\sqrt{x}(3c^2 + x).$$

Macht man nun auf beiden Seiten das Quadrat, so bekommt man

$$x^2-6cx^2-2c^3x+9c^2x^2+6c^4x+c^6 = x(9c^4+6c^2x+x^2),$$

oder

$$x^2-6cx^2-2c^3x+9c^2x^2+6c^4x+c^6 = 9c^4x+6c^2x^2+x^3.$$

Ordnet man diese Gleichung nach den Potenzen von x, so erhält man

$$x^3+6c^2x^2+6cx^2-x^2-9c^2x^2+9c^4x-6c^4x+2c^3x = c^6,$$

oder $$x^3-3c^2x^2+6cx^2-x^2+3c^4x+2c^3x = c^6,$$

oder $$x^3-x^2(3c^2-6c+1)+x(3c^4+2c^3) = c^6,$$

oder $$x^3-x^2[3c(c-2)+1]+xc^3(3c+2) = c^6.$$

Dies ist aber eine kubische Gleichung, die ganz der obigen Form gemäß ist.

Die Potenzen mit negativen Exponenten bezeichnen Brüche, deren Zähler = 1 und deren Nenner dieselbe Potenz, nur mit positivem Exponenten, ist, wie sie vorher negativ war. So ist z. B. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$. Hat man also die Gleichung

$$x^{-3}+ax^{-2}-cx+d = 0,$$

so ist diese so viel als

$$\frac{1}{x^3}+a.\frac{1}{x^2}-c.\frac{1}{x}+d = 0.$$

Bringt man nun alle Glieder auf einerlei Nenner, so erhält man

$$\frac{1}{x^3}+a.\frac{x}{x^3}-c.\frac{x^2}{x^3}+d.\frac{x^3}{x^3} = 0,$$

und multiplizirt man durchgängig mit dem gemeinschaftlichen Nenner, so gelangt man zu der kubischen Gleichung

$$1+ax-cx^2+dx^3 = 0,$$

welche, nach den Potenzen von x geordnet, die Gleichung gibt

$$dx^3-cx^2+ax+1 = 0.$$

Auf gleiche Art erhellet, daß auch die Gleichungen mit gebrochenen negativen Exponenten zu den höheren Gleichungen gehören. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$x^{-\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{2}}-c = 0,$$

so ist dieselbe $= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-c = 0$, und diese wiederum

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}-c = 0.$$

Da 1 auch $= \sqrt[3]{1}$ und $= \sqrt{1}$, so kann man die Gleichung auch so schreiben

$$\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{x}} - c = 0,$$

und dafür läßt sich setzen

$$\sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}} - c = 0.$$

Es ist daher $\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = c - \sqrt{\frac{1}{x}}$,

und auf beiden Seiten zum Kubus erhoben, kommt

$$\frac{1}{x} = c^3 - 3c^2\sqrt{\frac{1}{x}} + 3c\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}}.$$

Bringt man nun die Glieder mit dem Wurzelzeichen auf Eine Seite, so erhält man

$$\frac{1}{x} - c^3 - 3c\frac{1}{x} = -3c^2\sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x}},$$

oder $\frac{1}{x} - c^3 - 3c\frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{x}}\left(-3c^2 - \frac{1}{x}\right)$.

Auf beiden Seiten zum Quadrat erhoben, kommt

$$\frac{1}{x^2} - 2c^3\frac{1}{x} - 6c\frac{1}{x^2} + 6c^4\frac{1}{x} + 9c^2\frac{1}{x^2} + c^6 = \frac{1}{x}\left(9c^4 + 6c^2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right),$$

oder $\frac{1}{x^2} - 2c^3\frac{1}{x} - 6c\frac{1}{x^2} + 6c^4\frac{1}{x} + 9c^2\frac{1}{x^2} + c^6 = 9c^4\frac{1}{x} + 6c^2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$.

Bringt man die Glieder mit x auf Eine Seite, so erhält man

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 2c^3\frac{1}{x} - 6c\frac{1}{x^2} + 6c^4\frac{1}{x} - 9c^4\frac{1}{x} + 9c^2\frac{1}{x^2} - 6c^2\frac{1}{x^2} = -c^6.$$

Nachdem man gehoben hat, was sich heben läßt, kommt

$$-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 2c^3\frac{1}{x} - 6c\frac{1}{x^2} - 3c^4\frac{1}{x} - 3c^2\frac{1}{x^2} = -c^6.$$

Multiplizirt man nun durchgängig mit x^3, so ergibt sich die Gleichung

$$-1 + x - 2c^3x^2 - 6cx - 3c^4x^2 + 3c^2x = -c^6x^3.$$

Diese Gleichung geordnet, erhält man

$$x^3c^6 - 3c^4x^2 - 2c^3x^2 + 3c^2x - 6cx + x = 1,$$

oder $x^3c^6 - x^2(3c^4 + 2c^3) + x(3c^2 - 6c + 1) = 1,$
oder $x^3c^6 - x^2c^3(3c + 2) + x[3c(c-2) + 1] = 1.$

Dividirt man nun durchgängig mit c^6, so ergibt sich

$$x^3 - x^2\frac{c^3(3c+2)}{c^6} + x\frac{3c(c-2)+1}{c^6} = \frac{1}{c^6},$$

oder $$x^3 - x^2\frac{3c+2}{c^3} + x\frac{3c(c-2)+1}{c^6} = \frac{1}{c^6}.$$

Die Gleichungen mit gebrochenen negativen Exponenten geben also auch Gleichungen von höheren Graden und sind unter der allgemeinen Form mit begriffen.

§. 5.

Die Auflösung der Gleichungen von höheren Graden wollen wir mit den quadratischen beginnen. Diese zeichnen sich vor allen andern dadurch aus, daß sie immer eine direkte Auflösung gestatten, während man bei den andern sich meistens mit einer indirekten begnügen muß.

Was zuerst die reinen quadratischen Gleichungen betrifft, so sind die Regeln für die Auflösung derselben mit denen, welche wir Th. I. §. 118. bis 225. gegeben haben, einerlei. Nachdem man nämlich das Quadrat der unbekannten Größe allein auf Eine Seite gebracht hat, so wird die Quadratwurzel aus den bekannten Größen auf der andern Seite den Werth der unbekannten Größe bestimmen.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben:

$$ax^2 + b - cx^2 = \frac{x^2}{d} + ex^2,$$

so erhält man daraus nach §. 218. bis 221. die Gleichung

$$ax^2 - cx^2 - \frac{x^2}{d} - ex^2 = -b,$$

und daraus nach §. 224.

$$adx^2 - cdx^2 - x^2 - dex^2 = -db,$$

und daraus vermittelst des Gebrauchs der Klammer

$$x^2(ad - cd - 1 - de) = -db,$$

aus welcher man nach §. 223. findet

$$x^2 = -\frac{db}{d(a-c-e)-1},$$

also $$x = \sqrt{\left(-\frac{db}{d(a-c-e)-1}\right)}.$$

Es sei $a = 8$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 2$, so ist

$$x = \sqrt{-\frac{2 \cdot 6}{2(8-3-6)-1}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2.$$

Beispiele.

1) Ein Kaufmann hat Tuch, wovon ihm die Elle 3 thlr. kostet. Er verkauft dasselbe für $60\frac{3}{4}$ thlr., wie viel hat er dabei gewonnen und wie viel Ellen waren es, wenn man weiß, daß die Einnahme für das Tuch so viel beträgt, als das Produkt aus seiner Ausgabe in den vierten Theil der Ellen, die er verkauft hat?

Auflösung.

Hat derselbe x Ellen gehabt, so kosten ihm diese $3x$ thlr.; multiplizirt man nun diese mit $\frac{1}{4}x$, so gibt dies die Einnahme, nämlich $60\frac{3}{4}$ thlr. Man hat also die Gleichung.

$$\frac{3}{4}x^2 = 60\frac{3}{4},$$

oder $$3x^2 = 243,$$

also $$x^2 = 81,$$

und $$x = \sqrt{81} = 9.$$

Er hat also 9 Ellen Tuch verkauft, und da ihm diese 27 thlr. kosten, so hat er $33\frac{3}{4}$ thlr. beim Verkaufe gewonnen.

2) Es hat jemand Getreide, wovon ihm der Wispel halb so viel Thaler kostet, als die Anzahl der Wispel beträgt. Beim Verkaufe bekommt er $\frac{2}{5}$ mal so viel Thaler für den Wispel, als er Wispel hat und gewinnt so 1000 thlr.; wie viel Wispel hat er gehabt?

Auflösung.

Setzen wir die Menge der Wispel $= x$, so ist der Einkaufspreis für 1 Wspl. $= \frac{x}{2}$ und für alle $\frac{x^2}{2}$. Addirt man zu dieser Ausgabe den Gewinn, so muß die Einnahme kommen. Da man ihm nun für den Wispel $\frac{2}{5}x$ thlr. gezahlt hat, so beträgt die ganze Einnahme $\frac{3x^2}{5}$ und man hat folglich die Gleichung

$$\frac{x^2}{2} + 1000 = \frac{3x^2}{5}.$$

Alles unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$\frac{5x^2 + 10000}{10} = \frac{6x^2}{10},$$

also auch $$5x^2 + 10000 = 6x^2,$$

folglich $$10000 = x^2,$$

und $$\sqrt{10000} = x,$$

oder $$100 = x.$$

Er hat also 100 Wspl. gehabt, für 1 Wspl. 50 thlr. gegeben und 60 thlr. beim Verkaufe bekommen, also an allen 1000 thlr. gewonnen.

3) Ein Vater ist 4 mal älter als sein Sohn. Multiplizirt man nun das Alter des Vaters mit dem des Sohnes, dividirt das herausgekommne Produkt durch 100 und addirt noch 6 Jahre dazu, so kommen 15 Jahre; wie alt war der Vater?

Auflösung.

Setzt man das unbekannte Alter des Vaters $= x$, so ist das Alter des Sohnes $= \frac{1}{4}x$ und das Produkt aus beiden $= \frac{1}{4}x^2$. Dividirt man nun dieses durch 100 und rechnet noch 6 dazu, so sollen 15 Jahre kommen, also hat man die Gleichung $\frac{\frac{1}{4}x^2}{100} + 6 = 15$.

Daraus erhält man

$\frac{1}{4}x^2 + 600 = 1500,$

folglich $\frac{1}{4}x^2 = 1500 - 600 = 900,$

oder $x^2 = 4 \cdot 900 = 3600,$

also $x = \sqrt{3600} = 60.$

Der Vater war also 60, der Sohn 15 Jahr alt.

4) Zwei Personen legen Geld in eine Handlung. Jeder gewinnt mit seinem Gelde so viel Prozent als er Thaler eingelegt hat. Addirt man nun die Gewinne zusammen, so kommen 2500 thlr. heraus, zieht man sie aber von einander ab, so bleiben 700 thlr.; wie viel hat jeder eingelegt?

Auflösung.

Es habe der Eine x thlr. eingelegt und der Andere y thlr. Da der Erste x Prozent und der Zweite y Prozent gewonnen hat, so lassen sich diese Gewinne, die wir mit w und z bezeichnen wollen, berechnen, wenn man aufsetzt:

$$100 : x = x : w$$

und

$$100 : y = y : z.$$

Die Rechnung gibt $w = \frac{x^2}{100}$ und $z = \frac{y^2}{100}$. Nun hat man zwei Gleichungen:

1) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{100} = 2500,$ und 2) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{100} = 700,$

also $x^2 + y^2 = 250000,$ also $x^2 - y^2 = 70000,$

und $x^2 = 250000 - y^2.$ und $x^2 = 70000 + y^2.$

Setzt man nun die beiden Werthe für x^2 einander gleich, so erhält man

$$y^2 + 70000 = 250000 - y^2.$$

Auf beiden Seiten y^2 addirt, kommt

$$2y^2 + 70000 = 250000,$$

also $2y^2 = 180000,$

und $y^2 = 90000,$

folglich $y = \sqrt{90000} = 300.$

Schreibt man nun den Werth von y^2 in eine der beiden Gleichungen für x^2, so wird dieses selbst bestimmt werden. Es ist also z. B.

$$x^2 = 70000 + 90000 = 160000,$$

also $x = \sqrt{160000} = 400.$

Der Erste hat also 300 thlr. eingelegt und 300 Prozent gewonnen, also ist sein Gewinn 900 thlr.; der Zweite hat 400 thlr. eingelegt und damit 400 Prozent gewonnen, also ist sein Gewinn 1600 thlr. Die Summe beider Gewinne ist aber 2500 thlr. und ihr Unterschied 700 thlr.

5) In einer Spielgesellschaft gewinnt jemand beim ersten Spiele $\frac{1}{4}$ so viel Groschen, als er bei sich hat, beim zweiten Spiele verliert er $\frac{3}{8}$ so viel, und beim dritten gewinnt er wieder $\frac{1}{2}$ so viel, als die anfängliche Zahl der Groschen betrug. Wenn man nun das, was er im zweiten und dritten Spiele gewann, mit einander multiplizirt, das Produkt durch den Verlust beim zweiten Spiele dividirt und den Quotienten wieder mit dem anfänglichen Gelde multiplizirt, so kommen 192 gr. Wie viel hatte er anfänglich?

Auflösung.

Hatte der Spieler im Anfange x gr. bei sich, so beträgt sein Gewinn beim ersten Spiele $\frac{1}{4}x$ gr., beim dritten $\frac{1}{2}x$ gr. und der Verlust beim zweiten $\frac{3}{8}x$ gr. Das Produkt aus den Gewinnen ist also $\frac{1}{8}x^2$, und dividirt man in dieses mit dem Verluste, so kommt $\frac{\frac{1}{8}x^2}{\frac{3}{8}x} = \frac{x^2}{8} \cdot \frac{8}{3x} = \frac{x^2}{3x} = \frac{x}{3}$. Dieser Quotient nun, aufs neue mit x multiplizirt, gibt die Gleichung

$$\frac{x^2}{3} = 192,$$

also $x^2 = 576,$

und daher $x = \sqrt{576} = 24.$

Er hatte also anfangs 24 gr. bei sich, gewann im ersten Spiele 6 gr., im dritten 12 gr., verlor aber im zweiten 9 gr.

Das Produkt aus den Gewinnen ist 72 gr., diese, durch den Verlust dividirt, geben den Quotienten 8 gr., welcher, mit 24 multiplizirt, zum Produkte 192 gibt.

6) Es kauft jemand mehrere Zentner Zucker und bezahlt den Zentner mit 10 mal weniger Thaler als er Zentner gekauft hat. Beim Verkaufe gewinnt er so viel Prozent, als der Zentner Thaler kostet. Dividirt man nun seinen ganzen Gewinn durch den achten Theil von der Menge der Zentner und addirt zum Quotienten noch 28, so kommen gerade 100 thlr. heraus. Wie viel Zentner hat er gekauft?

Auflösung.

Hat er x Ztn. gekauft, so kostet ihm der Zentner $\frac{x}{10}$ thlr., also alle zusammen $\frac{x^2}{10}$. Da er nun $\frac{x}{10}$ Prozent gewinnt, so findet man den ganzen Gewinn durch die Proportion

$$100 : \frac{x}{10} = \frac{x^2}{10} : \text{Gewinn}.$$

Die Rechnung gibt den ganzen Gewinn $= \frac{x^3}{10000}$. Dividirt man diesen durch $\frac{x}{8}$ und addirt man zum Quotienten noch 28, so erhält man die Gleichung

$$\frac{8x^2}{10000} + 28 = 100,$$

$$\text{also } 8x^2 + 280000 = 1000000,$$

$$\text{folglich } 8x^2 = 720000,$$

$$\text{und daher } x^2 = 90000,$$

$$\text{und } x = \sqrt{900000} = 300.$$

Er hat also 300 Ztn. gekauft, den Zentner mit 30 thlr. bezahlt und beim Verkaufe 30 Prozent gewonnen. Dies gibt den ganzen Gewinn = 2700 thlr., und dividirt man in diesen mit $\frac{192}{8}$, so kommen 72, welches, mit 28 zusammen addirt, gerade 100 gibt.

Übungsaufgaben ohne Auflösung.

1) Es gibt jemand jährlich eine gewisse Summe aus. Multiplizirt man dieselbe mit ihrem zehnten Theile und addirt zum Produkte noch 1000, so kommen gerade 10000 thlr.; wie viel beträgt die jährliche Ausgabe?

2) In einer Gesellschaft verzehrt jede Person so viel Groschen, als die Anzahl der Glieder beträgt. Dividirt man nun die ganze

Summe durch 8 und addirt zum Quotienten noch 12 gr., so erhält man 30 gr.; wie viel Personen waren es?

3) Es verkauft jemand Getreide, den Wispel für 8 mal weniger Thaler, als er Wispel hat. Er gewinnt bei diesem Handel 800 thlr. Dividirt man nun seine Ausgabe mit 9, so kommen 512 thlr. Wie viel Wispel waren es und wie theuer hat er den Wispel eingekauft?

4) Drei Personen legen Geld in eine Handlung. Jeder gewinnt dabei so viel Prozent, als der zehnte Theil des eingelegten Kapitals beträgt. Addirt man den Gewinn des ersten und zweiten zusammen, so kommen 1640 thlr.; die Gewinne des ersten und dritten aber geben zusammen 3200 thlr. und die Summe der Gewinne des zweiten und dritten beträgt 3560 thlr.; wie viel hat jeder eingelegt?

5) Ein Kapital wird zu 200 mal weniger Prozent ausgeliehen, als die Größe des Kapitals selbst beträgt. Wenn man nun zu den Zinsen, die es in 8 Jahren trägt, noch 44 thlr. addirt, so kommen gerade 300 thlr. Wie groß war das Kapital?

6) Ein Kapital, das zu 5 Prozent ausgeliehen worden, trägt in 100 mal weniger Jahren, als die Größe des Kapitals beträgt, eine gewisse Summe an Zinsen. Dividirt man nun diese Summe durch 40 und addirt zum Quotienten noch 200, so kommen gerade 1000 thlr.; wie groß war das Kapital?

§. 6.

Anmerkung.

1) Wenn man von einer negativen Zahl das Quadrat macht, so ist dieses eben sowohl positiv, als wenn die Wurzel auch positiv gewesen wäre, z. B. $+9 \cdot +9$ ist $+81$ und $-9 \cdot -9$ ist auch $= +81$. Ein positives Quadrat hat daher jedesmal zwei Wurzeln, eine positive und eine negative. Bezeichnet man daher die Wurzel eines Quadrats, so setzt man vor das Wurzelzeichen sowohl $+$ als $-$, z. B. $3 \pm \sqrt{16}$, welcher Ausdruck entweder heißen kann $3+4$ oder $3-4$, also entweder $+7$ oder -1. Auf diesen doppelten Werth werden wir besonders bei den gemischten Gleichungen Rücksicht nehmen müssen.

2) Wenn also das Quadrat jeder Zahl positiv sein muß, so kann eigentlich aus einem negativen Quadrate gar keine Wurzel gezogen werden. Sobald daher aus einem negativen Quadrate eine Wurzel gezogen werden soll, so kann man das

Ausziehen nur andeuten, und man nennt eine solche Größe eine unmögliche, auch wohl imaginäre oder eingebildete, wie z. B. $\sqrt{-4}$, weil sie weder positiv noch negativ, kurz gar keine denkbare Zahl ist. Sobald man daher bei Auflösung einer Gleichung auf solche Wurzeln kommt, so ist dies ein Zeichen, daß die Aufgabe etwas Unmögliches und Ungereimtes enthält. Verlangt z. B. jemand von mir, daß ich ihm eine Zahl angeben soll, deren Quadrat zu 25 addirt die Zahl 9 zur Summe gebe, so habe ich, wenn ich die unbekannte Zahl $= x$ setze, die Gleichung:

$$x^2 + 25 = 9,$$

also $x^2 = 9 - 25,$

oder $x^2 = -16,$

und folglich $x = \sqrt{-16}.$

Da nun für x eine unmögliche Zahl kommt, so ist die Aufgabe ungereimt und keine Auflösung derselben denkbar.

Jede Wurzel aus einem negativen Quadrate läßt sich auf die Form $n\sqrt{-1}$ bringen. Denn hat man im Allgemeinen die unmögliche Größe $\sqrt{-a}$, so ist $-a = +a \cdot -1$, also $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$, d. h. ein Produkt aus einer möglichen Größe $\sqrt{a}$ und einer unmöglichen $\sqrt{-1}$. Setzt man also $\sqrt{a}$, mag es nun eine rationale oder irrationale Größe sein, $= n$, so erhellet, wie jede Wurzel aus einem negativen Quadrate unter der Form $n\sqrt{-1}$ enthalten sei.

§. 7.

Die Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen fodert einige besondere Regeln, weil in ihnen die unbekannte Größe nicht nur im Quadrate, sondern auch in der ersten Potenz vorkommt, also auf der einen Seite immer zweierlei Unbekanntes stehen bleibt.

Jede vermischte quadratische Gleichung kann auf die Form $x^2 \mp px + q = 0$ gebracht werden.

Die ursprüngliche Form einer solchen Gleichung kann von jener einfachen nur dadurch verschieden sein, daß das Quadrat und die erste Potenz der unbekannten Größe Koeffizienten hat, die aus mehrfachen Theilen zusammengesetzt sind. Aber mit dem Koeffizienten des Quadrats, wie vielfach er auch zusammengesetzt sei, lassen sich alle Glieder der Gleichung dividiren, wodurch diese selbst nicht verändert und doch das Quadrat der unbekannten Größe rein erhalten wird. Eben so kann man den Koeffizienten der ersten Potenz, wie vielfach er auch zu-

sammengesetzt sei, doch als eine einzige Zahl betrachten und folglich als einfachen Koeffizienten vor x setzen. Auch das dritte Glied, so vielfach es auch zusammengesetzt ist, läßt sich als eine einzige Zahl ansehen. Was nun aber die Zeichen der Glieder betrifft, so können diese theils + theils — sein, daher wir doppelte Zeichen bei Darstellung der allgemeinen Form gebraucht haben. Das Zeichen des Quadrats der unbekannten Größe muß aber immer + sein, weil die Wurzel aus einem negativen Quadrate etwas Unmögliches ist. Ist es daher in der ursprünglichen Gleichung negativ, so muß es dadurch, daß man alle Glieder mit — 1 multiplizirt, positiv gemacht werden.

Es sei die Gleichung gegeben

$$bx - ax^2 + \frac{b}{c}x - d = mx^2 - \frac{e}{g}x + \frac{a-d}{e}.$$

Man bringe erst alle Glieder auf Eine Seite oder mache eine vernichtete Gleichung. (Th. I. §. 215.) Dies gibt

$$bx - ax^2 + \frac{b}{c}x - d - mx^2 + \frac{e}{g}x - \frac{a-d}{e} = 0.$$

Dann ordne man die Glieder nach den Potenzen der unbekannten Größe und bringe gleichnamige Potenzen zusammen. Dies gibt

$$-ax^2 - mx^2 + bx + \frac{b}{c}x + \frac{e}{g}x - d - \frac{a-d}{e} = 0.$$

Vermittelst der Klammer lassen sich nun die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von x in Einen verwandeln. Man erhält

$$-(a+m)x^2 + \left(b + \frac{b}{c} + \frac{e}{g}\right)x - d - \frac{a-d}{e} = 0.$$

Multiplizirt man nun alle Glieder mit — 1, so wird x^2 positiv. Dies gibt

$$(a+m)x^2 - \left(b + \frac{b}{c} + \frac{e}{g}\right)x + d + \frac{a-d}{e} = 0.$$

Endlich dividire man alle Glieder durch den Koeffizienten von x^2, so bekommt man

$$x^2 - \frac{b + \frac{b}{c} + \frac{e}{g}}{a+m}x + \frac{d}{a+m} + \frac{\frac{a-d}{e}}{a+m} = 0,$$

oder $$x^2 - \frac{bcg + bg + ec}{cg(a+m)}x + \frac{ed + a - d}{e(a+m)} = 0,$$

oder $$x^2 - \frac{bg(c+1) + ec}{cg(a+m)}x + \frac{d(e-1) + a}{e(a+m)} = 0.$$

Rechnet man nun den Koeffizienten von x und das letzte Glied aus und setzt erstern = p und das letztere = q, so hat die Gleichung die Form

$$x^2 - px + q = 0.$$

§. 8.

Die Auflösung einer solchen vermischten quadratischen Gleichung wird auf folgende Art sich ergeben.

Die allgemeine Form war

$$x^2 \mp px \mp q = 0.$$

Daraus folgt $x^2 \mp px = \pm q$,

denn wenn man das Glied q auf die andere Seite bringt, so erhält es entgegengesetzte Zeichen (Th. I. §. 220.), also aus $\mp q$ wird $\pm q$.

In der Gleichung $x^2 \mp px = \pm q$ stecken eigentlich vier mögliche Formen der quadratischen Gleichung

1) $x^2 + px = +q$,
2) $x^2 - px = +q$,
3) $x^2 + px = -q$,
4) $x^2 - px = -q$.

Wir wollen die erste Form auflösen, weil sich daraus die Auflösung der übrigen bloß durch Veränderung der Zeichen ergeben wird, da die Größen überall dieselben sind. Es sei also

$$x^2 + px = q.$$

Stände das Glied px nicht da, so wäre es eine reine Gleichung, nämlich $x^2 = q$, also $x = \sqrt{q}$. Die Wurzel wäre daher eine eintheilige Größe. Da nun aber zu x^2 noch eine Größe px hinzukommt, so muß auch zur Wurzel von q noch ein Theil kommen; der Werth der unbekannten Größe wird daher eine zweitheilige Wurzel sein. Jede zweitheilige Wurzel läßt sich unter der Form $a + b$ darstellen; man kann also setzen $\sqrt{(x^2 + px)} = \sqrt{q} = a + b$. Ist dieses, so muß auch das Quadrat von $\sqrt{(x^2 + px)}$ oder $x^2 + px$ selbst $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sein.

Nun läßt sich folgende Vergleichung anstellen zwischen $x^2 + px$ und $a^2 + 2ab + b^2$. Es sei $x^2 = a^2$, so ist $x = a$.

Es sei ferner $px = 2ab$, so ist $p = 2b$, weil $x = a$ ist; daher ist auch $\frac{1}{2}p = b$. Nun fehlt aber an der Größe $x^2 + px$ noch ein Theil, den man mit b^2 vergleichen könnte. Die Größe $x^2 + px$ ist daher kein vollständiges Quadrat einer zweitheiligen Größe, weil noch das Quadrat des zweiten Theils,

nämlich ein Ausdruck für b^2, fehlt. Da wir nun wissen, daß $b = \frac{1}{2}p$ ist, so ist $b^2 = \frac{1}{4}p^2$. Addiren wir also diese Größe noch zu $x^2 + px$, so werden wir einen Ausdruck bekommen, der genau dem Quadrate einer zweitheiligen Größe entspricht, nämlich $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Nun war aber $x^2 + px = q$. Soll also diese Gleichung nicht verändert werden, so muß man auf beiden Seiten Gleiches addiren, also sowohl links als rechts die Größe $\frac{1}{4}p^2$. Dadurch erhält man $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$.

Auf der linken Seite ist ein vollständiges Quadrat der zweitheiligen Größe $a + b$, man kann also auf dieser Seite die Wurzel vollständig finden. Zu dem Ende brauchen wir nur die oben für a und b gefundenen Werthe, nämlich x und $\frac{1}{2}p$ zu schreiben. Es ist also

$$\sqrt{(x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2)} = x + \tfrac{1}{2}p.$$

Damit nun aber die Gleichung nicht verändert werde, so ziehe man auch auf der rechten Seite die Quadratwurzel; dadurch erhält man

$$x + \tfrac{1}{2}p = \mp\sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

Jetzt befreie man x von dem dabei stehenden bekannten Gliede, indem man es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite bringt, so erhält man

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

Man setzt nämlich das Glied $-\frac{1}{2}p$ vor das Wurzelzeichen und nicht nach der Klammer, weil man sonst auf den Gedanken kommen könnte, es gehöre $-\frac{1}{2}p$ mit zu der Größe, aus welcher die Wurzel gezogen werden sollte. Vor das Wurzelzeichen kommt aber das Doppelzeichen $\mp$, weil jede Quadratwurzel sowohl positiv als negativ sein kann.

Die Größen in der Klammer lassen sich unter einerlei Nenner bringen; dann erhält man

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \sqrt{\left(\frac{4q + p^2}{4}\right)}.$$

Aus einem Bruche zieht man die Wurzel, wenn man dieselbe sowohl aus dem Zähler, als aus dem Nenner zieht. Also hat man

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \frac{\sqrt{(4q + p^2)}}{\sqrt{4}},$$

und da sich aus dem Nenner 4 die Quadratwurzel ziehen läßt, so hat man die Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2}p \mp \frac{\sqrt{(4q + p^2)}}{2}.$$

Jetzt hat man zwei Brüche mit einerlei Nenner; man addire also die Zähler und setze den gemeinschaftlichen Nenner unter die Summe, so bekommt man

$$x = \frac{-p \mp \sqrt{(4q+p^2)}}{2}.$$

Es kommen also für x zwei Werthe, wie es die Natur der Quadratwurzeln mit sich bringt, nämlich

$$1)\ x = \frac{-p+\sqrt{(4q+p^2)}}{2},$$

$$2)\ x = \frac{-p-\sqrt{(4q+p^2)}}{2}.$$

Für die andern drei Formen der quadratischen Gleichung läßt sich der Werth von x auf dieselbe Art entwickeln oder auch gleich aus der obigen Entwicklung herleiten.

In der Form $x^2 - px = q$ ist p auf der linken Seite negativ; es wird also positiv, wenn man es auf die rechte bringt. Also ist

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(4q+p^2)}}{2},$$

$$2)\ x = \frac{p-\sqrt{(4q+p^2)}}{2}.$$

In der Form $x^2 + px = -q$ ist q negativ; man erhält also

$$1)\ x = \frac{-p+\sqrt{(-4q+p^2)}}{2}$$

$$= \frac{-p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2},$$

$$2)\ x = \frac{-p-\sqrt{(-4q+p^2)}}{2}$$

$$= \frac{-p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}.$$

In der letzten Form ist auch p negativ; man erhält also

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2},$$

$$2)\ x = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}.$$

Wir wollen jetzt alle mögliche Werthe, die x in einer quadratischen Gleichung haben kann, zusammenstellen. Die römischen Ziffern bezeichnen die vier Hauptformen der quadratischen Gleichung selbst, die arabischen die Formen für die Werthe von x.

$$\text{I. } x^2+px=q. \begin{cases} 1)\ x=\dfrac{-p+\sqrt{(4q+p^2)}}{2} \\ 2)\ x=\dfrac{-p-\sqrt{(4q+p^2)}}{2} \end{cases}$$

$$\text{II. } x^2-px=q. \begin{cases} 3)\ x=\dfrac{p+\sqrt{(4q+p^2)}}{2} \\ 4)\ x=\dfrac{p-\sqrt{(4q+p^2)}}{2} \end{cases}$$

$$\text{III. } x^2+px=-q. \begin{cases} 5)\ x=\dfrac{-p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2} \\ 6)\ x=\dfrac{-p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2} \end{cases}$$

$$\text{IV. } x^2-px=-q. \begin{cases} 7)\ x=\dfrac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2} \\ 8)\ x=\dfrac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2} \end{cases}$$

Die Werthe 1, 2, 3, 4 für x geben allemal wirkliche positive oder negative Werthe, weil die Quadratwurzel aus $4q+p^2$ immer wirklich gezogen werden kann, mag sie nun rational oder irrational sein. Die Werthe 5, 6, 7, 8 für x können aber auch unmöglich werden, wenn nämlich 4q größer als p^2 ist, alsdann ist p^2-4q negativ und die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl eine unmögliche Größe. Dies zeigt denn, daß die Aufgabe ungereimt ist.

Will man obige Formeln in Worte auflösen, so ergibt sich folgende Regel: Nachdem die Gleichung in die einfache Form $x^2+px=\pm q$ gebracht worden ist, mache man von dem Koeffizienten p der ersten Potenz der unbekannten Größe das Quadrat und addire dazu oder subtrahire davon das 4 mal genommene Glied q auf der rechten Seite; aus der Summe oder dem Reste ziehe man die Quadratwurzel und addire dieselbe zum Koeffizienten p im zweiten Gliede linker Hand, oder ziehe sie davon ab, und von der Summe oder dem Unterschiede nehme man die Hälfte, so erhält man die gesuchte unbekannte Größe.

Beispiele zur Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen.

§. 9.

Unter den Beispielen, welche wir im ersten Theile für die Auflösung der Aufgaben mit zwei unbekannten Größen gegeben

haben, kommen mehrere vor, wo die Auflösung auf quadratische Gleichungen führte, so daß wir dieselbe für diesen zweiten Theil versparen mußten. Von diesen wollen wir gegenwärtig zuerst sprechen.

I. Zu §. 262.; erstes Exempel.

Wir bemerken erstlich, daß der mögliche Gewinn 4000 thlr. nicht richtig angegeben ist, wenn man für x einen rationalen Werth haben will; es muß 3040 thlr. heißen. Dann ist aber in der Entwicklung der zweiten Gleichung selbst ein Fehler. Anstatt $x^2 + mf = y(d-e) + xe$ muß es heißen $x^2 + mf = ym(d-e) + mxe$, und daraus folgt

$$x^2 - mxe = ym(d-e) - mf.$$

Zieht man die Gleichung $\frac{x^2}{m} + g = xe$ von der Gleichung $\frac{x^2}{m} + f = yd + xe - ye$ ab, so kommt $f - g = yd - ye$, oder $f - g = y(d-e)$, und daraus findet sich $y = \frac{f-g}{d-e}$.

Setzt man nun in der obigen Gleichung $x^2 - mxe = ym(d-e) - mf$ anstatt y den eben gefundenen Werth $\frac{f-g}{d-e}$, so kommt $x^2 - xme = \frac{f-g}{d-e} m(d-e) - mf$,

oder $x^2 - xme = (f-g)m - mf$,

weil der Divisor $d-e$ gegen den Multiplikator $d-e$ sich aufhebt. Da nun wieder m ein gemeinschaftlicher Faktor ist, so erhält man $x^2 - xme = m(f-g-f)$,

oder $x^2 - xme = -mg$.

Dies ist derselbe Ausdruck, der aus der ersten Gleichung §. 262. entwickelt wurde. Nun setze man statt m, e und g die gegebenen Zahlen, nämlich $m = 9\frac{1}{2} = \frac{19}{2}$, $e = 48$ und $g = 3040$, so ist

$$x^2 - 456x = -28880.$$

Es gehört daher diese Gleichung zur Hauptform IV. am Ende von §. 8., und es ist $p = 456$ und $q = 28880$, also

$$1) \quad x = \frac{456 + \sqrt{(456^2 - 4 \cdot 28880)}}{2}$$

$$= \frac{456 + \sqrt{(207936 - 115520)}}{2}$$

$$= \frac{456 + \sqrt{92416}}{2}$$

$$= \frac{456 + 304}{2}$$

$$= \frac{760}{2} = 380.$$

Es sind also 380 Wspl. gekauft worden, und zwar der Wispel für $\frac{380}{9\frac{1}{2}} = 40$ thlr. Da nun $y = \frac{f-g}{d-e}$ oder $= \frac{g-f}{e-d}$, also $y = \frac{3040-2500}{48-45} = \frac{540}{3} = 180$ Wspl. war, so kosten diese $45 \cdot 180 = 8100$ thlr., die übrigen 200 Wspl. aber $48 \cdot 200 = 9600$ thlr. Es ist also die ganze Einnahme $= 8100 + 9600 = 17700$ thlr., und da die Ausgabe $= 40 \cdot 380 = 15200$ thlr. war, so ist der wirkliche Gewinn $= 2500$ thlr. Die mögliche Einnahme beträgt $48 \cdot 380$ thlr. $= 18240$ thlr., folglich der mögliche Gewinn 3040 thlr.

$$2)\ x = \frac{456 - \sqrt{(456^2 - 4 \cdot 28880)}}{2}$$
$$= \frac{456 - \sqrt{92416}}{2}$$
$$= \frac{456 - 304}{2}$$
$$= \frac{152}{2} = 76 \text{ Wspl.}$$

Dieser Werth ist für die Aufgabe unpassend, daher nur der erste von x allein Genüge leistet.

II. Zu §. 262.; drittes Exempel.

In der Aufgabe müssen ebenfalls einige Zahlen berichtigt werden. Anstatt $1\frac{1}{2}$ mal so theuer, muß es $1\frac{1}{8}$ mal heißen, und anstatt: er gewinnt 20 mal, muß es heißen: er gewinnt $112\frac{1}{2}$ mal so viel.

Die gefundene quadratische Gleichung ist

$$pwy^2 + yg(u-p) - ypwe = -ge(p-1).$$

Setzt man linker Hand y gemeinschaftlich, so kommt

$$pwy^2 + y[g(u-p) - pwe] = -ge(p-1),$$

und alle Glieder durch pw dividirt, erhält man

$$y^2 + y\left(\frac{g(u-p)}{pw} - e\right) = -\frac{ge(p-1)}{pw}.$$

Jetzt berechne man die Koeffizienten von y und das Hauptglied rechter Hand. Es ist nämlich $u = 1\frac{1}{8} = \frac{9}{8}$, $p = 6$, $e = 42$, $w = 112\frac{1}{2} = \frac{225}{2}$ und $g = 4000$. Diese Werthe anstatt der Buchstaben in die Gleichung gesetzt, kommt

$$y^2 + y\left(\frac{4000 \cdot (\frac{9}{8} - 6)}{6 \cdot \frac{225}{2}} - 42\right) = -\frac{4000 \cdot 42 \cdot (6-1)}{6 \cdot \frac{225}{2}},$$

oder $y^2 + y\left(\frac{4000 \cdot -\frac{39}{8}}{675} - 42\right) = -\frac{168000 \cdot 1}{675}$,

oder $y^2 - y\left(\frac{19500}{675} + 42\right) = -\frac{168000}{675}$,

oder $y^2 - y\left(\frac{780}{27} + 42\right) = -\frac{112}{9}\frac{00}{9}$,

oder $y^2 - y\left(\frac{260}{9} + 378\right) = -\frac{112}{9}\frac{00}{9}$,

oder $y^2 - y\frac{638}{9} = -\frac{112}{9}\frac{00}{9}$.

Diese Gleichung gehört ebenfalls zu der vierten Hauptform §. 8., nämlich zu $x^2 - px = -q$. Es ist $-p = -\frac{638}{9}$ und $-q = -\frac{112}{9}\frac{00}{9}$. Also ist

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{638}{9} + \sqrt{\left[\left(\frac{638}{9}\right)^2 - 4 \cdot \frac{112}{9}\frac{00}{9}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{638}{9} + \sqrt{\left(\frac{407044}{81} - \frac{448}{9}\frac{00}{9}\right)}}{2}.$$

Bringt man die Größen in der Klammer unter einerlei Nenner, so kommt

$$y = \frac{\frac{638}{9} + \sqrt{\left(\frac{407044 - 403200}{81}\right)}}{2},$$

oder

$$y = \frac{\frac{638}{9} + \frac{\sqrt{3844}}{9}}{2}$$

$$= \frac{\frac{638}{9} + \frac{62}{9}}{2}$$

$$= \frac{700}{18} = 38\frac{16}{18} = 38\frac{8}{9}\text{ thlr.}$$

Es ist also der Wispel für $38\frac{8}{9}$ thlr. eingekauft worden, und da x schon durch die erste Gleichung des Exempels $= \frac{g}{e-y}$ gefunden worden war, so ist x in Zahlen $= \frac{4000}{42 - 38\frac{8}{9}}$ $= \frac{4000}{3\frac{1}{9}} = \frac{4000 \cdot 9}{28} = \frac{2000}{7} = 1285\frac{5}{7}$ Wspl.

Berechnet man nun die Ausgabe, so kommen 50000 thlr. Der zuerst verkaufte Theil ist $214\frac{2}{7}$ Wspl. und der Preis für den Wispel $= \frac{2}{5} \cdot 38\frac{8}{9}$ thlr. $= 43\frac{1}{4}$ thlr., also ist die Einnahme für diesen Theil $= 9375$ thlr. Die übrigen $1071\frac{3}{7}$ Wspl. wurden zu 42 thlr. verkauft, also ist die Einnahme $= 45000$ thlr.; dazu die vorige addirt, gibt die ganze Einnahme $= 54375$ thlr., also den wirklichen Gewinn $= 4375$ thlr., und dieser ist in der That $112\frac{1}{2}$ mal größer, als der Einkaufspreis $38\frac{8}{9}$. Wäre Alles für den Preis des Restes verkauft worden, so hätte die mögliche Einnahme 54000 thlr. und der mögliche Gewinn 4000 thlr. betragen.

Es ist aber auch

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2},$$

oder in Zahlen

$$y = \frac{\frac{638}{9} - \sqrt{\frac{3844}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{638}{9} - \frac{62}{9}}{2}$$

$$= \frac{576}{18} = 32 \text{ thlr.}$$

Dann ist der Wispel für 32 thlr. eingekauft worden und die ganze Waare $x = \frac{k}{e-y} = \frac{4000}{10} = 400$ Wspl. Die Ausgabe betrug 12800 thlr.; der zuerst verkaufte Theil war $= \frac{400}{6} = 66\frac{2}{3}$ Wspl., der Preis des Wispels $= 32 \cdot \frac{9}{8} = 36$ thlr., also die Einnahme $= 36 \cdot \frac{200}{3} = 2400$ thlr., die Einnahme für die übrigen $333\frac{1}{3}$ Wspl. aber $= 42 \cdot \frac{10000}{3} = 14000$ thlr. Also ist die ganze Einnahme 16400 thlr., folglich der wirkliche Gewinn $= 3600$, und dieser ist wieder $112\frac{1}{2}$ mal größer, als der Einkaufspreis des Wispels. Die mögliche Einnahme beträgt 16800, also der mögliche Gewinn 4000 thlr.

Wir haben also zwei reale Auflösungen dieses Exempels gefunden.

III. Im fünften Exempel S. 318. sind auch in der Aufgabe einige unrichtige Zahlen. Anstatt 40 muß es 400, statt 10 aber 100 und statt 50 und 60 muß es 5 und 6 heißen. Dann ist bei der zweiten Gleichung das eine Zeichen falsch; es muß heißen $xb + wy = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}$ und nicht $+\frac{y^2}{v}$. Die gefundene quadratische Gleichung ist

$$qy^2 + vqwy - qybv - bv^2qw = (v+q)vzy - v^2qbz.$$

Diese Gleichung, indem wir zugleich die Klammer auf der rechten Seite auflösen, wird so geordnet:

$$qy^2 + qvwy - qvby - qvzy - v^2zy = qbv^2w - qbv^2z.$$

Setzen wir nun die gemeinschaftlichen Faktoren allein und die ungleichen in Klammer, so erhalten wir

$$qy^2 + y[qv(w-b-z) - v^2z] = qbv^2(w-z),$$

und dividirt man mit q, so ergibt sich

$$y^2 + y\left(v(w-b-z) - \frac{v^2z}{q}\right) = bv^2(w-z).$$

Da nun $q = 400$, $v = 100$, $w = 5$, $z = 6$ und $b = 2$ thlr. ist, so läßt sich der Koeffizient von y und das Glied rechter Hand berechnen. Man hat nämlich

$$y^2 + y\left(100(5-2-6) - \frac{100^2 \cdot 6}{400}\right) = 2 \cdot 100^2(5-6),$$

oder $y^2 + y(-300 - \frac{100 \cdot 6}{4}) = -20000,$

oder $y^2 - 450y = -20000.$

Die Gleichung gehört also auch zu der vierten Hauptform §. 8., nämlich zu $x^2 - px = -q$.

Es ist daher $y^2 - py = -q$ und $-p = -450$, $-q = -20000$. Also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{450 + \sqrt{(450^2 - 80000)}}{2}$$

$$= \frac{450 + \sqrt{(202500 - 80000)}}{2}$$

$$= \frac{450 + \sqrt{122500}}{2}$$

$$= \frac{450 + 350}{2}$$

$$= 400 \text{ Ellen.}$$

Da nun $x = \frac{vzy}{y - bv} = \frac{100 \cdot 6 \cdot 400}{400 - 2 \cdot 100} = \frac{240000}{200} =$ 1200 Ellen ist, so war die Ausgabe 2400 thlr.; die Einnahme für die ersten 400 Ellen, wovon die Elle für 400 mal weniger Thaler, als es Ellen sind, also für 3 thlr. verkauft wurde, beträgt 1200 thlr., und die Einnahme für die übrigen 800 Ellen, wovon die Elle für 100 mal weniger Thaler, als zuerst Ellen abgesetzt wurden, also für 4 thlr. verkauft wurde, ist 3200 thlr., folglich die gesammte Einnahme = 4400 thlr., der Gewinn also 2000 thlr., und dieser ist 5 mal größer, als die Anzahl der zuerst verkauften Ellen. Die mögliche Einnahme wäre 4800 thlr. gewesen, also der mögliche Gewinn = 2400 thlr., welcher 6 mal größer, als jene 400 Ellen ist.

Es ist $2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$$= \frac{450 - \sqrt{122500}}{2}$$

$$= \frac{450 - 350}{2}$$

$$= \frac{100}{2} = 50 \text{ Ellen.}$$

Berechnet man aber aus diesem Werthe für y den Werth für x $= \frac{vzy}{y-bv} = \frac{100 \cdot 6 \cdot 50}{50-200}$, so kommt $\frac{30000}{-150} = -200$ Ellen, und man sieht, daß der zweite Werth für x in dieser Aufgabe keinen Sinn gibt.

IV. Im sechsten Exempel S. 319. muß es 180 mal weniger Thaler anstatt 80 mal, und statt des Gewinnes 400, muß es $483\frac{1}{3}$ heißen.

Aus der Gleichung $x^2 - rbx = rg$ kann man x berechnen. Es gehört nämlich dieselbe zur Hauptform II. (§. 8.), und daher ist

$$1)\ x = \frac{rb + \sqrt{[4rg + (rb)^2]}}{2}.$$

Da $r = 180$, $b = 2\frac{1}{3}$ thlr. und $g = 600$ thlr. ist, so ist

$$x = \frac{180 \cdot \frac{7}{3} + \sqrt{[4 \cdot 180 \cdot 600 + (180 \cdot \frac{7}{3})^2]}}{2}$$

$$= \frac{420 + \sqrt{(432000 + 176400)}}{2}$$

$$= \frac{420 + \sqrt{608400}}{2}$$

$$= \frac{420 + 780}{2}$$

$$= \frac{1200}{2} = 600 \text{ Ellen.}$$

$$2)\ x = \frac{rb - \sqrt{[4rg + (rb)^2]}}{2}$$

$$= \frac{420 - \sqrt{608400}}{2}$$

$$= \frac{420 - 780}{2}$$

$$= -\frac{360}{2} = -180 \text{ Ellen.}$$

Dieser letztere Werth paßt nicht für unsere Aufgabe; der erstere ist daher allein der richtige.

Die zweite Gleichung des Exempels war

$$rf - ryc = x^2 - xy - xrb.$$

Da x schon bekannt ist, so läßt sich y bestimmen; man ordne zu dem Ende die Glieder so:

$$xy - ryc = x^2 - xrb - rf,$$

oder $$y(x - rc) = x^2 - r(xb + f).$$

Es ist $c = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ und $f = 483\frac{1}{3} = \frac{1450}{3}$. Also ist $y(600 - 180 \cdot \frac{11}{4}) = 600^2 - 180(600 \cdot \frac{7}{3} + 483\frac{1}{3})$,

oder $y(600 - 495) = 360000 - 180(\frac{4200}{3} + \frac{1450}{3})$,

oder $105y = 360000 - 180.\frac{550}{3}$,

oder $105y = 360000 - 339000$,

also $y = \frac{21000}{105} = 200$ Ellen.

Es sind also 600 Ellen gekauft worden, die Elle zu $2\frac{1}{3}$ thlr., folglich ist die Ausgabe = 1400 thlr. Davon wurden 200 Ellen, die Elle zu $2\frac{3}{4}$ thlr. verkauft; es war also die Einnahme = 550 thlr. Von den übrigen 400 Ellen wurde die Elle für 180 mal weniger Thaler, als Ellen gekauft worden waren, also für $3\frac{1}{3}$ thlr. verkauft, die Einnahme für den Rest war folglich $1333\frac{1}{3}$, daher die ganze Einnahme $1883\frac{1}{3}$, und folglich der Gewinn $483\frac{1}{3}$ thlr. Wären aber die ganzen 600 Ellen zu $3\frac{1}{3}$ verkauft worden, so wäre die Einnahme 2000 thlr., also der Gewinn 600 thlr. gewesen.

V. Im 11ten Exempel müssen die Zahlen 200 in $266\frac{2}{3}$ und 710 in 900 verwandelt werden. Aus der ersten Gleichung $x^2 - xme = -mg$, welche zur vierten Hauptform §. 8. gehört, läßt sich x bestimmen. Es ist nämlich, da $m = 266\frac{2}{3} = \frac{800}{3}$, $e = 4$ thlr. und $g = 800$ thlr. ist, die Waare x

$$1) = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{800}{3} \cdot 4 + \sqrt{\left[\left(\frac{800 \cdot 4}{3}\right)^2 - \frac{4 \cdot 800 \cdot 800}{3}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3200}{3} + \sqrt{\left[\left(\frac{3200}{3}\right)^2 - \frac{2560000}{3}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3200}{3} + \sqrt{\frac{2560000}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3200}{3} + \frac{1600}{3}}{2}$$

$$= \frac{4800}{6} = 800 \text{ Ellen.}$$

$$2) = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3200}{3} - \sqrt{\frac{2560000}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{3200}{3} - \frac{1600}{3}}{2}$$

$$= \frac{1600}{6} = 266\frac{2}{3} \text{ Ellen.}$$

Der Werth von y findet sich aus der zweiten Gleichung

$$qx^2 - x(my + mqe) = -mq(f + ye).$$

Löset man die Klammern auf, so erhält man

$$qx^2 - mxy - mqex = -mqf - mqye.$$

Bringt man nun die Glieder mit y auf Eine Seite, so

kommt $mqey - mxy = mqex - qx^2 - mqf,$

also $ym(qe - x) = q[m(ex - f) - x^2],$

folglich $$y = \frac{q[m(ex - f) - x^2]}{m(qe - x)}.$$

Es ist aber $q = 160$, $m = 266\frac{2}{3} = \frac{800}{3}$, $e = 4$ thlr., $f = 900$ thlr. und x nach dem ersten Werthe $= 800$ Ellen. Also ist

$$y = \frac{160\left[\frac{800}{3}(4 \cdot 800 - 900) - 640000\right]}{\frac{800}{3}(160 \cdot 4 - 800)}$$

$$= \frac{160\left(\frac{800}{3} \cdot 2300 - 640000\right)}{\frac{800}{3} \cdot -160}$$

$$= \frac{160\left(\frac{1840000 - 1920000}{3}\right)}{-\frac{128000}{3}}$$

$$= \frac{-160 \cdot 80000}{-128000}$$

$$= \frac{-12800000}{-128000}$$

$= 100$ Ellen.

Es sind also 800 Ellen gekauft worden, die Elle für $\frac{800}{\frac{800}{3}}$ thlr. $= 3$ thlr. Die Ausgabe beträgt also 2400 thlr. Nun wurden 100 Ellen zu $\frac{800}{160}$ thlr. $= 5$ thlr. verkauft, also die Einnahme $= 500$ thlr. Die übrigen 700 Ellen wurden zu 4 thlr. verkauft, also die Einnahme 2800 thlr., folglich die ganze Einnahme $= 3300$ thlr. und daher der Gewinn $= 900$ thlr. Wäre alles zu 4 thlr. verkauft worden, so hätte die mögliche Einnahme 3200 thlr., also der mögliche Gewinn 800 thlr. betragen.

Nehmen wir den andern für x gefundenen Werth $= 266\frac{2}{3}$ Ellen, so wird auch für y ein anderer kommen. Es war nämlich

$$y = \frac{q[m(ex - f) - x^2]}{m(qe - x)},$$

$$\text{also } y = \frac{160\left[\frac{800}{3}\left(\frac{4\cdot 800}{3} - 900\right) - \frac{640000}{9}\right]}{\frac{800}{3}\left(160\cdot 4 - \frac{800}{3}\right)}$$

$$= \frac{160\left(\frac{800}{3}\cdot\frac{500}{3} - \frac{640000}{9}\right)}{\frac{800}{3}\cdot\frac{1120}{3}}$$

$$= \frac{160\left(\frac{40000}{9} - \frac{640000}{9}\right)}{\frac{896000}{9}}$$

$$= \frac{160\cdot -\frac{240000}{9}}{\frac{896000}{9}}$$

$$= \frac{-38400000}{896000}$$

$$= -42\tfrac{5}{7} \text{ Ellen.}$$

Da die Elle beim Einkaufe $266\frac{2}{3}$ mal weniger gekostet hat, als Ellen gekauft wurden, so betrug der Einkaufspreis gerade 1 thlr., also die Ausgabe $266\frac{2}{3}$ thlr. Nun hat er $-42\frac{5}{7}$ Ellen verkauft, d. h. offenbar, er hat zu jenen $266\frac{2}{3}$ Ellen noch $42\frac{5}{7}$ Ellen gekauft, aber zu einem andern Preise, nämlich die Elle für 160 mal weniger Thaler, als die anfänglich gekauften $266\frac{2}{3}$ Ellen betragen. Dies gibt den Preis für 1 Elle $= 1\frac{2}{3}$ thlr. und es kosteten jene $42\frac{5}{7}$ Ellen $71\frac{3}{7}$ thlr. Diese sind negative Einnahme, d. h. Ausgabe, und müssen also noch zu der vorigen Ausgabe $= 266\frac{2}{3}$ thlr. addirt werden; dadurch kommt die ganze Ausgabe $= 338\frac{2}{21}$ thlr. und die ganze Anzahl der gekauften Ellen $= 309\frac{11}{21}$. Da nun aber $309\frac{11}{21}$ Ellen eben entsteht, wenn ich $-42\frac{5}{7}$ Ellen von $266\frac{2}{3}$ Ellen abziehe, so besteht der Rest, den er die Elle zu 4 thlr. verkauft, aus jenen $309\frac{11}{21}$ Ellen und diese geben eine Einnahme von $1238\frac{2}{21}$ thlr. Ziehe ich nun davon die Ausgabe $= 338\frac{2}{21}$ thlr. ab, so bleibt als wahrer Gewinn 900 thlr. übrig. Hätte er nun jene $42\frac{5}{7}$ Ellen weder gekauft noch verkauft, sondern bloß die ersten $266\frac{2}{3}$ Ellen, so wäre die mögliche Einnahme $= 1066\frac{2}{3}$ thlr. und also der mögliche Gewinn $= 800$ thlr.

VI. Im 16ten Exempel S. 329. muß es 16 mal statt 10 mal heißen. Die Gleichung, durch welche y bestimmt wird, ist quadratisch; es muß aber in derselben zuletzt nicht $+geq$, sondern $-geq$ heißen. Die ganze Gleichung ist

$$pqe^2(f-g)+g(e^2q-g) = y^2[pq(g-f)]-y[2pqe(g-f)-geq],$$

oder

$$y^2[pq(g-f)]-y[2pqe(g-f)-geq] = g(e^2q-g)-pqe^2(g-f).$$

Dividirt man nun alle Glieder durch den Koeffizienten von y^2, so kommt

$$y^2 - y\frac{2pqe(g-f)-geq}{pq(g-f)} = \frac{g(e^2q-g)}{pq(g-f)} - e^2.$$

Nach den Angaben des Exempels ist $p = 4$, $q = 16$, $e = 30$ thlr., $f = 3500$ thlr., $g = 4000$ thlr. Rechnet man nun den Koeffizienten von y und das Hauptglied rechter Hand aus, so erhält man folgendes:

$$y^2 - y\frac{2.4.16.30(4000-3500)-4000.30.16}{4.16(4000-3500)} = \frac{4000(30^2.16-4000)}{4.16(4000-3500)} - 30^2,$$

oder $$y^2 - y\frac{3840.500-1920000}{64.500} = \frac{4000(14400-4000)}{64.500} - 900,$$

oder $$y^2 - y\frac{1920000-1920000}{32000} = \frac{41600000}{32000} - 900.$$

Der Koeffizient von y ist, wie man sieht, $= 0$, dadurch fällt dies Glied ganz weg und man erhält die reine quadratische Gleichung $y^2 = \frac{41600}{32} - 900 = 1300 - 900 = 400$,

also $y = \pm\sqrt{400} = +20$ oder -20.

Nur der positive Werth gibt in der Aufgabe einen Sinn, es ist also $y = 20$ thlr. Daraus findet man nun x, denn es war $x = \frac{g}{e-y} = \frac{4000}{30-20} = 400$ Wspl.

Es sind also 400 Wspl. zu 20 thlr. gekauft worden, die Ausgabe ist daher $= 8000$ thlr. Davon wurde der vierte Theil oder 100 Wspl. zu $\frac{400}{110}$ thlr. oder 25 thlr. verkauft, also ist die Einnahme $= 2500$ thlr. Die übrigen 300 Wspl. werden zu 30 thlr. verkauft, also ist die Einnahme 9000 thlr., folglich die ganze $= 11500$ thlr., daher der Gewinn 3500 thlr. Wäre aber Alles zu 30 thlr. verkauft worden, so wäre die mögliche Einnahme 12000 thlr., daher der mögliche Gewinn 4000 thlr. gewesen.

VII. Im 17ten Exempel S. 331. heißt die erste Gleichung

$$x^2 - xrb = rg.$$

Es ist $b = 5$ gr., $r = 10$, aber da sich r auf die Menge der gekauften Zentner bezieht, so ist nach Th. I. S. 328. die Zahl $r = \frac{10.24}{110}$, und da b $= 5$ gr. der Preis des Pfundes ist, so ist der Preis des Zentners $\frac{5.110}{24}$ thlr. Es ist also $rb = \frac{10.24}{110}.\frac{5.110}{24} = 10.5 = 50$. Der mögliche Gewinn g ist $= 275$ thlr. (so muß es statt 375 thlr. in der Aufgabe heißen), also ist $rg = \frac{10.24}{110}.275 = \frac{24.275}{11} = 24.25 = 600$. Die Gleichung läßt sich also so in Zahlen ausdrücken

$$x^2 - 50x = 600.$$

Sie gehört daher zur Grundform II. (§. 8.), nämlich zu $x^2 - px = q$. Es ist daher

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{50 + \sqrt{(50^2 + 4 \cdot 600)}}{2}$$
$$= \frac{50 + \sqrt{(2500 + 2400)}}{2}$$
$$= \frac{50 + \sqrt{4900}}{2}$$
$$= \frac{50 + 70}{2}$$
$$= \frac{120}{2} = 60 \text{ Ztn.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{50 - \sqrt{4900}}{2}$$
$$= \frac{50 - 70}{2} = -10 \text{ Ztn.}$$

Dieser Werth gibt in der Aufgabe keinen natürlichen Sinn; wir behalten daher nur den ersten bei und bestimmen daraus y. Es war aber in der zweiten Gleichung

$$x^2(p-1) + x(ry - prb) = prf,$$
oder $$x^2(p-1) + xry - xprb = prf,$$
folglich $$xry = xprb + prf - x^2(p-1),$$
oder $$xry = pr(xb + f) - x^2(p-1),$$
also $$y = \frac{p(xb+f)}{x} - \frac{x(p-1)}{r}.$$

Da nun $p = 6$, $f = 252\frac{1}{2} = \frac{3025}{12}$, nach dem Vorigen aber $r = \frac{10 \cdot 24}{110} = \frac{24}{11}$ und $b = \frac{5 \cdot 110}{24}$ ist, so ist

$$y = \frac{6(60 \cdot \frac{5 \cdot 110}{24} + \frac{3025}{12})}{60} - \frac{60(6-1)}{\frac{24}{11}}$$
$$= \frac{60 \cdot \frac{550}{24} + \frac{6050}{24}}{10} - \frac{60 \cdot 5 \cdot 11}{24}$$
$$= \frac{33000 + 6050}{240} - \frac{3300}{24}$$
$$= \frac{3300 + 605 - 3300}{24}$$
$$= \frac{605}{24} = 25\frac{5}{24} \text{ thlr.}$$

als der Preis des Zentners, folglich der Preis des Pfundes

$$= \frac{\frac{605 \cdot 24}{24}}{110} \text{ gr.} = \frac{605}{110} \text{ gr.} = 5\frac{1}{2} \text{ gr.}$$

Es wurden also 60 Ztn. eingekauft, das Pfund zu 5 gr., folglich war die Ausgabe 1375 thlr. Der sechste Theil oder 10 Ztn. wurde das Pfund für $5\frac{1}{2}$ gr. verkauft, also war die Einnahme $= 252\frac{1}{2}$ thlr. Die übrigen 50 Ztn. wurden für $\frac{60}{10}$ gr. oder für 6 gr. das Pfund verkauft, dies gibt eine Einnahme von 1375 thlr., und folglich einen Gewinn von $252\frac{1}{2}$ thlr. Wäre von der ganzen Waare das Pfund zu 6 gr. verkauft worden, so hätte die Einnahme 1650 thlr. betragen, folglich der Gewinn 275 thlr.

VIII. Das 21ste Exempel S. 334. ist nur durch die gewählte Methode quadratisch geworden. Denn wenn man aus der ersten Gleichung den Werth von y entwickelt und diesen in die zweite Gleichung statt y setzt, so wird das Quadratische sich aufheben.

Die erste Gleichung ist

$$x^2 - rxy = rg,$$

also $$rxy = x^2 - rg,$$

folglich $$y = \frac{x^2}{rx} - \frac{rg}{rx},$$

oder $$y = \frac{x}{r} - \frac{g}{x}.$$

Die zweite Gleichung war

$$qx^2 + x[c(r-q) - qry] = qrf.$$

Setzt man nun im letzten Gliede linker Hand statt y den oben gefundenen Werth, so erhält man

$$qx^2 + x\left(c(r-q) - qr\frac{x}{r} + qr\frac{g}{x}\right) = qrf.$$

Multiplizirt man nun die Glieder in der Klammer mit dem vorstehenden gemeinschaftlichen Faktor x, so erhält man

$$qx^2 + xc(r-q) - qx^2 + qrg = qrf.$$

Es hebt sich also qx^2 und $-qx^2$ gegenseitig auf, und man erhält $$xc(r-q) + qrg = qrf,$$

oder $$xc(r-q) = qrf - qrg,$$

wofür man auch, wenn man alle Glieder mit -1 multiplizirt, setzen kann $$xc(q-r) = qrg - qrf,$$

oder $$xc(q-r) = qr(g-f),$$

also $$x = \frac{qr(g-f)}{c(q-r)}.$$

Das ganze Exempel hätte weit bequemer aufgelöst werden können, wenn die Methode der Subtraktion wäre angewendet worden. Dann wäre auch nicht einmal zum Schein eine quadratische Gleichung gekommen.

Es ist

die erste Gleichung $= xy + g = \frac{x^2}{r}$,

die zweite Gleichung $= xy + f = \frac{cx}{q} + \frac{x^2}{r} - \frac{cx}{r}$.

Letztere von der erstern abgezogen, gibt

$$g - f = -\frac{cx}{q} + \frac{cx}{r},$$

oder $qr(g-f) = qcx - rcx$,

oder $qr(g-f) = cx(q-r)$,

also $\frac{qr(g-f)}{c(q-r)} = x$.

Gerade wie oben.

Man sieht daraus, daß es bei Auflösung der Gleichungen nicht ganz gleichgültig ist, welche Methode man anwendet. In den meisten Fällen hat die Methode der Subtraktion Vorzüge von der der Kombination.

Nach den Angaben des Exempels ist $c = 200$, $q = 400$, $r = 300$, $g = 2400$ und $f = 2200$. Es ist also

$$x = \frac{400 \cdot 300 (2400 - 2200)}{200 (400 - 300)}$$
$$= \frac{400 \cdot 300 \cdot 200}{200 \cdot 100}$$
$$= 400 \cdot 3 = 1200 \text{ Ellen.}$$

Da nun $y = \frac{x}{r} - \frac{g}{x}$ war, so ist

$$y = \frac{1200}{300} - \frac{2400}{1200} = 4 - 2 = 2 \text{ thlr.}$$

Es wurden also 1200 Ellen gekauft, die Elle zu 2 thlr.; die Ausgabe war daher 2400 thlr. Davon wurden 200 Ellen zu $\frac{1200}{400}$ thlr. oder zu 3 thlr. und die übrigen 1000 Ellen zu $\frac{1200}{300}$ thlr. oder zu 4 thlr. verkauft. Die erste Einnahme beträgt 600 thlr., die zweite 4000 thlr., also die ganze Einnahme 4600 thlr., folglich der Gewinn 2200 thlr.; die mögliche Einnahme aber 4800 thlr., also der mögliche Gewinn 2400 thlr.

IX. Das 24ste Exempel S. 336. enthält wieder eine quadratische Gleichung. Wir haben nämlich die Gleichung erhalten $qy^2 - y[vbq + vz(v+q)] = -qv^2z(b+s)$.

Dividirt man mit dem Koeffizienten von y^2, so bekommt man $y^2 - y\left(vb + \frac{vz(v+q)}{q}\right) = -v^2z(b+s)$.

Berechnet man nun nach den Zahlen des Exempels den Koeffizienten von y und das Hauptglied rechter Hand, so bekommt man

$$y^2 - y\left(2.24 + \frac{2.60(2+10)}{10}\right) = -4.60\left(24 + \frac{42}{3}\right),$$

oder $y^2 - y(48 + 12.12) = -240(72 + 40)$,

oder $y^2 - y.192 = -80.112$,

oder $y^2 - 192y = -8960$.

Diese Gleichung gehört zur Hauptform IV. (§. 8.), nämlich zu $x^2 - px = -q$. Es ist also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{192 + \sqrt{(192^2 - 4.8960)}}{2}$$

$$= \frac{192 + \sqrt{(36864 - 35840)}}{2}$$

$$= \frac{192 + \sqrt{1024}}{2}$$

$$= \frac{192 + 32}{2}$$

$$= \frac{224}{2} = 112 \text{ Ztn.}$$

Ist y bekannt, so findet man x durch die Gleichung

$$x = \frac{vzy}{y - vb} = \frac{2.60.112}{112 - 2.24} = \frac{120.112}{64} = 210 \text{ Ztn.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{192 - \sqrt{1024}}{2}$$

$$= \frac{192 - 32}{2}$$

$$= \frac{160}{2} = 80 \text{ Ztn.}$$

Alsdann ist $x = \frac{2.60.80}{80 - 2.24} = \frac{120.80}{32} = 300$ Ztn.

Das Exempel läßt also zwei Auflösungen zu. Ist $y = 112$ und $x = 210$, so ist die Ausgabe $= 24.210$ thlr. $= 5040$ thlr. Die ersten 112 Ztn. werden zu $\frac{210}{10}$ thlr. oder 21 thlr. verkauft, also ist die Einnahme $= 21.112$ thlr. $= 2352$ thlr. Die übrigen 98 Ztn. werden zu $\frac{112}{2}$ thlr. oder 56 thlr. verkauft, also ist die Einnahme $= 98.56 = 5488$ thlr., und daher die ganze Einnahme $= 7840$ thlr., und folglich der Gewinn $= 2800$ thlr. und dieser ist $13\frac{1}{3}$ mal größer, als die Menge der gekauften Zentner. Die mögliche Einnahme ist 56.210 thlr.

= 11760 thlr., also der mögliche Gewinn = 6720, und dieser ist 60 mal größer, als die zuerst verkauften 112 Zentner.

Nimmt man die andern Werthe für x und y, nämlich 300 Ztn. und 80 Ztn., so ist die Ausgabe = 24 . 300 = 7200 thlr. Die 80 Ztn. wurden zu $\frac{300}{10}$ oder 30 thlr. verkauft, also war die Einnahme = 2400 thlr.; die Einnahme für die übrigen 220 Ztn., welche zu $\frac{80}{2}$ oder 40 thlr. verkauft wurden, beträgt 40 . 220 = 8800 thlr., also die ganze Einnahme 11200 thlr., folglich der Gewinn = 4000 thlr., welcher $13\frac{1}{3}$ mal so groß ist, als die Menge der gekauften Zentner. Wäre nun alles zu 40 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme = 12000 thlr., also der mögliche Gewinn 4800 thlr. gewesen und dieser ist wieder 60 mal größer, als 80 Ztn.

X. Im 27sten Exempel S. 339. muß der mögliche Gewinn = 2400 thlr. sein.

Aus der ersten Gleichung läßt sich x bestimmen. Es ist nämlich $x^2 - xrb = rg$.

Da nun b = 20, r = 8 und g = 2400 ist, so hat man die Gleichung

$$x^2 - 8.20.x = 8.2400,$$

oder $$x^2 - 160x = 19200.$$

Die Gleichung gehört zur Hauptform II., nämlich zu $x^2 - px = q$. Also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{160 + \sqrt{(160^2 + 4.19200)}}{2}$$

$$= \frac{160 + \sqrt{25600 + 76800)}}{2}$$

$$= \frac{160 + \sqrt{(102400)}}{2}$$

$$= \frac{160 + 320}{2}$$

$$= \frac{480}{2} = 240 \text{ Ztn.}$$

$$2)\ x = \frac{160 - \sqrt{102400}}{2}$$

$$= \frac{160 - 320}{2} = -80.$$

Dieser letztere Werth für x gibt keinen natürlichen Sinn, also ist nur der erste gültig.

Ist nun x bekannt, so kann man aus der zweiten Gleichung y bestimmen.

Es

Es ist nämlich, wenn man den Druckfehler rcy in —rcy verbessert hat,

$$-rcy = x^2 - x(c + br + rs),$$

oder $$rcy = x[c + r(b + s)] - x^2,$$

folglich $$y = \frac{x[c + r(b + s)] - x^2}{rc}.$$

Da nun $c = 40$ und $s = 12$ ist, so hat man

$$y = \frac{240[40 + 8(20 + 12)] - 240 \cdot 240}{8 \cdot 40}$$

$$= \frac{3[40 + 8(20 + 12)] - 240 \cdot 3}{4}$$

$$= 3(10 + 2 \cdot 32) - 60 \cdot 3$$

$$= 3 \cdot 74 - 180$$

$$= 222 - 180 = 42 \text{ thlr.}$$

Also wurden 240 Stn. zu 20 thlr. gekauft, daher die Ausgabe = 4800 thlr. Davon wurden 40 Stn. zu 42 thlr. verkauft, also die Einnahme = 1680 thlr.; die übrigen 200 Stn. aber zu $\frac{240}{8}$, also zu 30 thlr., und die Einnahme ist 6000 thlr., folglich die ganze Einnahme 7680 und der Gewinn = 2880 thlr., welcher gerade 12 mal so groß ist, als 240. Wäre aber Alles zu 30 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme = 7200 thlr., und also der Gewinn 2400 thlr. gewesen.

XI. Im 30sten Exempel S. 341. ist folgende quadratische Gleichung gefunden worden:

$$y^2u(v - 1) + yt(r - u) = f - rt^2.$$

Mit dem Koeffizienten von y^2 dividirt, kommt

$$y^2 + y\frac{t(r - u)}{u(v - 1)} = \frac{f - rt^2}{u(v - 1)}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $u = 4$, $v = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $r = 10$, $f = 4600$ und $t = 10$. Also hat man

$$y^2 + y\frac{10(10 - 4)}{4(\frac{3}{2} - 1)} = \frac{4600 - 10 \cdot 100}{4(\frac{3}{2} - 1)},$$

oder $$y^2 + y\frac{10 \cdot 6}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3600}{4 \cdot \frac{1}{2}},$$

oder $$y^2 + 30y = 1800.$$

Diese Gleichung gehört zur Hauptform I. (§. 8.), nämlich zu $x^2 + px = q$, und es ist daher

$$1)\ y = \frac{-p+\sqrt{(p^2+4q)}}{2}$$
$$= \frac{-30+\sqrt{(30^2+4\cdot 1800)}}{2}$$
$$= \frac{-30+\sqrt{(900+7200)}}{2}$$
$$= \frac{-30+\sqrt{8100}}{2}$$
$$= \frac{-30+90}{2}$$
$$= \frac{60}{2} = 30 \text{ thlr.}$$

Daraus bestimmt man nun x vermittelst der Gleichung

$$ry+rt = x,$$
oder $$r(y+t) = x.$$
Also $$10(30+10) = x,$$
oder $$400 = x.$$

$$2)\ y = \frac{-p-\sqrt{(p^2+4q)}}{2}$$
$$= \frac{-30-\sqrt{81100}}{2}$$
$$= \frac{-30-90}{2}$$
$$= \frac{-120}{2} = -60 \text{ thlr.}$$

Dieser Werth gibt in der Aufgabe keinen natürlichen Sinn; wir behalten daher nur den ersten bei.

Es sind also 400 Wspl. zu 30 thlr. gekauft worden, daher die Ausgabe = 12000 thlr. Davon wurden verkauft $\frac{4}{10}$. 30 oder 120 Wspl. zu $\frac{3}{4}$. 30 oder 45 thlr., die Einnahme war also 5400 thlr. Die übrigen 280 Wspl. wurden zu $\frac{400}{10}$ oder 40 thlr. verkauft, also die Einnahme = 11200 thlr., folglich die ganze Einnahme = 16600 thlr., daher der Gewinn = 4600 thlr. Wäre aber Alles zu 40 thlr. verkauft worden, so hätte die Einnahme 16000 thlr., also der Gewinn 4000 thlr. betragen, und dieser ist 10 mal größer, als die Anzahl der Wispel.

XII. Das 33ste Exempel S. 344. gibt die quadratische Gleichung $x^2(m-pq)+xy\overline{m}q(p-1) = mpqk$.

Man muß y aus der ersten Gleichung $x^2+mg = mxy$ herleiten und den Werth desselben in die obige Gleichung setzen.

Es ist aber $y = \frac{x^2+mg}{mx}$, und daraus erhält man folgende Gleichung

$$x^2(m-pq)+xmq(p-1).\frac{x^2+mg}{mx} = mpqf.$$

Multiplizirt man nun wirklich und bringt den Bruch weg, so ergibt sich

$$mx^3(m-pq)+mx^3q(p-1)+m^2xqg(p-1) = m^2xpqf.$$

Dividirt man nun alle Glieder durch mx, so erhält man

$$x^2(m-pq)+x^2q(p-1)+mqg(p-1) = mpqf,$$

oder, wenn man die Klammern auflöst,

$$x^2m-x^2pq+x^2qp-x^2q+mpqg-mqg = mpqf.$$

Hebt man, was sich heben läßt und bringt die bekannten Glieder auf die rechte Seite, so kommt

$$x^2m-x^2q = mpqf-mpqg+mqg,$$

oder

$$x^2(m-q) = m(qg-pq(g-f),$$

also

$$x^2 = \frac{m(qg-pq(g-f)}{m-q}.$$

Dies ist eine reine quadratische Gleichung, aus der man x findet, wenn man aus dem Gliede rechter Hand die Quadratwurzel zieht.

Es ist $m = 200$, $p = \frac{9}{4}$, $q = 180$, $f = 450$, $g = 600$. Also

$$x^2 = \frac{200(180.600-\frac{9}{4}.180(600-450)}{200-180}$$

$$= \frac{200(108000-8.60.150)}{20}$$

$$= 10.36000 = 360000.$$

Folglich $x = \sqrt{360000} = 600$.

Da nun $y = \frac{x^2+mg}{mx} = \frac{x}{m}+\frac{g}{x}$ ist, so ist

$$y = \frac{600}{200}+\frac{600}{600} = 3+1 = 4.$$

Es sind also 600 Ellen zu $\frac{600}{200}$ oder 3 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe = 1800 thlr. Davon wurden verkauft $\frac{600}{\frac{8}{3}}$ oder $600.\frac{3}{8} = 225$ Ellen zu $\frac{600}{180}$ oder $3\frac{1}{3}$ thlr., folglich war die Einnahme = 750 thlr. Der Rest 375 Ellen wurden für den Preis $y = 4$ thlr. verkauft, also die Einnahme = 1500 thlr., folglich die ganze Einnahme = 2250 thlr., der Gewinn ist daher 450 thlr. Wäre aber Alles zu 4 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme 2400 thlr., also der Gewinn 600 thlr. gewesen.

Im zweiten Exempel S. 346. iſt die quadratiſche

$$y(1-u)+y\left[t[u(p+1)-1]-\frac{pw}{m}\right]=pt^2.$$

Dividirt man mit dem Koeffizienten von y^2, ſo kommt

$$y^2+y\,\frac{t[u(p+1)-1]-\frac{pw}{m}}{u(1-u)}=\frac{pt^2}{u(1-u)}.$$

Nach den Angaben des Exempels, wo es aber $173\frac{7}{9}$ anſtatt $184\frac{8}{9}$ heißen muß, iſt $t=35$, $u=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$, $p=\frac{10}{3}$, $w=173\frac{7}{9}=\frac{1564}{9}$ und $m=8$. Es iſt alſo

$$y^2+y\,\frac{35\left[\frac{5}{3}\left(\frac{10}{3}+1\right)-1\right]-\frac{\frac{10}{3}\cdot\frac{1564}{9}}{8}}{\frac{5}{3}\left(1-\frac{5}{3}\right)}=\frac{\frac{10}{3}\cdot 35^2}{\frac{5}{3}\left(1-\frac{5}{3}\right)},$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\,\frac{35\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{13}{3}-1\right)-\frac{15640}{27\cdot 8}}{\frac{5}{3}\cdot-\frac{2}{3}}=\frac{10.1225}{3\cdot\frac{5}{3}\cdot-\frac{2}{3}},$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\,\frac{35\left(\frac{65}{9}-\frac{9}{9}\right)-\frac{1955}{27}}{-\frac{10}{9}}=\frac{12250}{-\frac{10}{3}},$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\,\frac{35\cdot\frac{56}{9}-\frac{1955}{27}}{-\frac{10}{9}}=-3675,$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\,\frac{\frac{1960}{9}-\frac{1955}{27}}{-\frac{10}{9}}=-3675,$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\left(\frac{5880}{27}-\frac{1955}{27}\right).-\frac{9}{10}=-3675,$$

$$\text{oder}\quad y^2+y\,\frac{3925}{27}.-\frac{9}{10}=-3675,$$

$$\text{oder}\quad y^2-y\,\frac{3925}{30}=-3675,$$

$$\text{oder}\quad y^2-\frac{785}{6}y=-3675.$$

Es gehört dieſe Gleichung zur Form $x^2-px=-q$, und alſo iſt 1) $y=\frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$

$$=\frac{\frac{785}{6}+\sqrt{\left[\left(\frac{785}{6}\right)^2-4\cdot 3675\right]}}{2}$$

$$=\frac{\frac{785}{6}+\sqrt{\left(\frac{616225}{36}-4\cdot 3675\right)}}{2}$$

$$=\frac{\frac{785}{6}+\sqrt{\frac{87025}{36}}}{2}$$

$$=\frac{\frac{785}{6}+\frac{295}{6}}{2}$$

$$=\frac{1080}{12}=90\text{ thlr.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2} = \frac{\frac{785}{6} - \sqrt{\frac{87025}{36}}}{2} = \frac{\frac{785}{6} - \frac{295}{6}}{2} = \frac{490}{12} = 40\frac{5}{6}\text{ thlr.}$$

Nun war in der ersten Gleichung

$$x = m(uy - t),$$

also $x = 8(\frac{5}{3} \cdot 90 - 35) = 8(150 - 35)$
$= 8 \cdot 115 = 920$ Wspl.

Nach dem zweiten Werthe von y ist

$$x = 8(\tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{245}{6} - 35) = 8(\tfrac{1225}{18} - \tfrac{630}{18}) = 8 \cdot \tfrac{595}{18} = \tfrac{4760}{18} = \tfrac{2380}{9} = 264\tfrac{4}{9}\text{ Wspl.}$$

Nach den ersten Werthen für y und x sind also 920 Wspl. zu $\frac{920}{8}$ thlr. oder 115 thlr. gekauft worden, die Ausgabe war also 105800 thlr. Davon sind $\frac{3}{10}$ oder $\frac{920 \cdot 3}{10} = 276$ Wspl. zu 90 thlr. verkauft worden, also die Einnahme = 24840 thlr. Die übrigen 644 Wspl. sind zu $\frac{5}{3} \cdot 90$ oder 150 thlr. verkauft worden, also die Einnahme = 96600 thlr., folglich die ganze Einnahme = 121440 thlr., und daher der Gewinn = 15640 thlr., welcher $173\frac{7}{9}$ mal größer ist, als 90 thlr. Wäre Alles zu 150 thlr. verkauft worden, so hätte die Einnahme 138000 thlr., und also der Gewinn 32200 thlr. betragen, welcher 35 mal größer ist, als 920 Wspl.

Nach den beiden andern Werthen für x und y sind $264\frac{4}{9}$ Wspl. zu $\frac{264\frac{4}{9}}{8}$ oder $33\frac{1}{18}$ thlr. eingekauft worden; dies gibt eine Ausgabe von $8741\frac{29}{81}$ thlr. Davon wurden $\frac{3}{10}$ oder $79\frac{1}{3}$ Wspl. zu $40\frac{5}{6}$ thlr. verkauft; die Einnahme war also = $3239\frac{4}{5}$ thlr. Der Rest von $185\frac{1}{9}$ Wspl. wurde zu $40\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{3}$ oder $68\frac{1}{18}$ thlr. verkauft; die Einnahme war also $12597\frac{58}{81}$ thlr., daher die ganze Einnahme = $15837\frac{23}{81}$ thlr. und der Gewinn = $7095\frac{25}{27}$ thlr., welcher auch $173\frac{7}{9}$ mal größer ist, als $68\frac{1}{18}$ thlr. Wäre aber Alles zu diesem Preise verkauft worden, so hätte die Einnahme $17996\frac{74}{81}$ thlr. und der Gewinn $9255\frac{5}{9}$ thlr. betragen, welcher 35 mal größer ist als $264\frac{4}{9}$ Wspl.

XIV. Im 39sten Exempel S. 352. suche man aus der ersten Gleichung $x^2 + mg = mxy$ den Werth von $y = \frac{x^2 + mg}{mx}$ und setze diesen statt y in die zweite Gleichung, so bekommt

man eine Gleichung, worin nur noch die unbekannte Größe x vorkommt. Es war aber

$$qx^2 + mqsx - mcx = mqxy - mqcy,$$

oder $$qx^2 + xm(qs - c) = ymq(x - c).$$

Statt y also obigen Werth gesetzt, kommt

$$qx^2 + xm(qs - c) = \frac{x^2 + mg}{mx} \cdot mq(x - c),$$

oder $$qx^2 + xm(qs - c) = \frac{mq(x - c)(x^2 + mg)}{mx},$$

oder $$qx^2 + xm(qs - c) = \frac{mq(x^3 + xmg - cx^2 - cmg)}{mx},$$

oder $$mqx^3 + x^2m^2(qs - c) = mqx^3 + m^2qxg - mqcx^2 - m^2cqg.$$

Es hebt sich auf beiden Seiten mqx^3, also kommt

$$x^2m^2(qs - c) = m^2qxg - mqcx^2 - m^2cqg.$$

Durch m Alles dividirt, erhält man

$$x^2m(qs - c) = mqgx - qcx^2 - mcqg.$$

Ordnet man nun die Gleichung, so kommt

$$x^2[m(qs - c) + qc] - xmqg = -mcqg.$$

Alles durch den Koeffizienten von x^2 dividirt, kommt

$$x^2 - x\frac{mqg}{m(qs - c) + qc} = -\frac{mcqg}{m(qs - c) + qc}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $m = 8$, $c = 80$, $q = 6$, $s = 18\frac{1}{3} = \frac{55}{3}$, $g = 6400$. Also

$$x^2 - x\frac{8.6.6400}{8(6.\frac{55}{3} - 80) + 6.80} = -\frac{8.80.6.6400}{8(6.\frac{55}{3} - 80) + 6.80},$$

oder $$x^2 - x\frac{8.6.6400}{8(110 - 80) + 480} = -\frac{8.80.6.6400}{8(110 - 80) + 480},$$

oder $$x^2 - x\frac{8 \cdot 6 \cdot 6400}{240 + 480} = -\frac{8 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 6400}{240 + 480},$$

oder $$x^2 - x\frac{8 \cdot 6 \cdot 6400}{720} = -\frac{8 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 6400}{720},$$

oder $$x^2 - x\frac{1280}{3} = -\frac{102400}{3}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - pq = -q$. Also ist

1) $$x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1280}{3} + \sqrt{\left(\frac{1638400}{9} - \frac{1228800}{9}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1280}{3} + \sqrt{\frac{409600}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1280}{3} + \frac{640}{3}}{2}$$

$$= \frac{1920}{6} = 320 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1280}{3} - \frac{640}{3}}{2}$$

$$= \frac{640}{6} = 106\tfrac{2}{3}\ \text{Wspl.}$$

Nimmt man den ersten Werth für x an, so sind 320 Wspl. zu $\frac{320}{8}$ oder 40 thlr. eingekauft worden, die Ausgabe betrug daher 12800 thlr. Davon verkauft er 80 Wspl. zu $\frac{320}{80}$ oder $53\frac{1}{3}$ thlr., die Einnahme ist folglich $4266\frac{2}{3}$ thlr. Um nun den Preis der übrigen 240 Wspl. zu finden, berechne man den oben angegebenen Werth von y, nämlich

$$y = \frac{x^2 + mg}{mx} = \frac{x}{m} + \frac{g}{x} = \frac{320}{8} + \frac{6400}{320} = 40 + 20$$

$$= 60\ \text{thlr.}$$

Daraus findet man die Einnahme für den Rest = 14400 thlr., also die ganze Einnahme = $18666\frac{2}{3}$ thlr., und daher der Gewinn = $5866\frac{2}{3}$ thlr., welcher $18\frac{1}{3}$ mal größer ist, als 320 Wspl. Wäre Alles zu 60 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme 19200 thlr., also der Gewinn 6400 gewesen.

Nimmt man den zweiten Werth für $x = 106\frac{2}{3}$ Wspl., so ist der Einkaufspreis = $\frac{106\frac{2}{3}}{8} = 13\frac{1}{3}$ thlr., also die Ausgabe = $1422\frac{2}{9}$ thlr. Nun verkauft er 80 Wspl. zu $\frac{106\frac{2}{3}}{6}$ oder $17\frac{7}{9}$ thlr., also die Einnahme = $1422\frac{2}{9}$ thlr. Der Preis der übrigen $26\frac{2}{3}$ Wspl. oder y war = $\frac{x}{m} + \frac{g}{x} = \frac{106\frac{2}{3}}{8} + \frac{6400}{106\frac{2}{3}} = 13\frac{1}{3} + 60 = 73\frac{1}{3}$ thlr., also die Einnahme = $1955\frac{5}{9}$ thlr., die ganze Einnahme folglich $3378\frac{2}{9}$ thlr. und der Gewinn $1955\frac{5}{9}$ thlr., welcher $18\frac{1}{3}$ mal größer ist als $106\frac{2}{3}$ Wspl. Die mögliche Einnahme ist $7822\frac{2}{9}$, also der mögliche Gewinn 6400 thlr.

XV. Im 41sten Exempel S. 354. ist für y die quadratische Gleichung gefunden worden

$$y^2u(m-q) + y[mt(q-vu) - qv] = qmvt^2.$$

Dividirt man mit dem Koeffizienten von y^2, so erhält man

$$y^2 + y\frac{mt(q-vu) - qv}{u(m-q)} = \frac{qmvt^2}{u(m-q)}.$$

Nach dem Exempel ist $m = 300$, $q = 280$, aber da es in der Aufgabe heißt, die Elle kostet beim Einkaufe 300 mal und vom zuerst verkauften Theile 280 mal weniger Groschen,

als er Ellen kaufte, so muß man dies auf Thaler reduzieren, und zu dem Ende noch 300 und 280 mit 24 multiplizieren, es wird also heißen müssen, die Elle kostet 300 . 24 und 280 . 24 mal weniger Thaler, als er Ellen kaufte, und so wird $q = 280 . 24$. Eben so, wenn es weiter hin heißt, die Elle verkauft er für 20 mal weniger Groschen, als er Thaler gewonnen hat, so ist v auch $= 20 . 24$. Endlich ist $t = \frac{3}{24}$ und $u = 3$. Obige Gleichung wird also in Zahlen so ausgedrückt:

$$y^2 + y\,\frac{300 . 24 . \frac{3}{24}(280 . 24 - 20 . 24 . 3) - 280 . 24 . 20 . 24}{3(300 . 24 - 280 . 24)} = \frac{280 . 24 . 300 . 24 . 20 . 24 . \frac{3}{24}}{3(300 . 24 - 280 . 24)},$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{300 . 3\,[24(280 - 20 . 3)] - 280 . 24 . 20 . 24}{3 . 24(300 - 280)} = \frac{280 . 24 . 300 . 24 . 20 . 24}{64 . 3 . 24(300 - 280)},$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{300 . 3 . 24 . 220 - 280 . 24 . 20 . 24}{3 . 24 . 20} = \frac{280 . 24 . 300 . 24 . 20 . 24}{64 . 3 . 24 . 20},$$

$$\text{oder } y^2 + y(300 . 11 - 280 . 8) = 280 . 3 . 300,$$

$$\text{oder } y^2 + 1060y = 252000.$$

Diese Gleichung gehört zur Hauptform I., nämlich zu $x^2 + px = q$. Es ist dahre

$$1)\ y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2} = \frac{-1060 + \sqrt{(1123600 + 1008000)}}{2} = \frac{-1060 + \sqrt{2131600}}{2} = \frac{-1060 + 1460}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ thlr. Gewinn.}$$

$$2)\ y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2} = \frac{-1060 - 1460}{2} = \frac{-2560}{2} = -1280.$$

Da aber dieser Werth keinen natürlichen Sinn gibt, so behalten wir nur den ersten bei und bestimmen daraus x. Es war aber aus der ersten Gleichung gefunden worden

$$x = \frac{m(y - vt)}{v}$$
$$= \frac{300 \cdot 24 (200 - 20 \cdot 84 \cdot \frac{1}{4})}{20 \cdot 24}$$
$$= 15(200 - 60)$$
$$= 15 \cdot 140 = 2100 \text{ Ellen.}$$

Es sind also 2100 Ellen gekauft worden, die Elle zu $\frac{2100}{300}$ oder 7 gr., also die Ausgabe = 14700 gr. = $612\frac{1}{2}$ thlr. Davon wurden verkauft $3 \cdot 200$ oder 600 Ellen, die Elle zu $\frac{2100}{280}$ oder $7\frac{1}{2}$ gr., also die Einnahme = 4500 gr. = $187\frac{1}{2}$ thlr. Die übrigen 1500 Ellen wurden zu $\frac{200}{20}$ oder 10 gr. verkauft, also die Einnahme = 15000 gr. oder 625 thlr., folglich die ganze Einnahme $625 + 187\frac{1}{2} = 812\frac{1}{2}$ thlr., daher der Gewinn = 200 thlr. Hätte er aber Alles zu 10 gr. verkauft, so wäre die Einnahme 875 thlr., also der Gewinn $262\frac{1}{2}$ gewesen und dieser ist $\frac{1}{8}$ von 2100.

XVI. Im 42sten Exempel S. 355. wäre gar keine quadratische Gleichung nöthig gewesen, da der Werth von x aus der ersten Gleichung in lauter bekannten Zahlen kommt. Es ist nämlich $x = \sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$, und da $m = 5$, $r = 4$, $g = 500$ ist, so ist

$$x = \sqrt{\frac{5 \cdot 4 \cdot 500}{5-4}} = \sqrt{5 \cdot 4 \cdot 500} = \sqrt{10000} = 100.$$

Da nun S. 356. die Gleichung gefunden wurde:

$$-ryd - rg = -(y + rs)\sqrt{\frac{rmg}{m-r}},$$

oder
$$ryd + rg = y\sqrt{\frac{rmg}{m-r}} + rs\sqrt{\frac{rmg}{m-r}}$$

und $\sqrt{\frac{rmg}{m-r}} = 100$, $d = 24$ und $s = 4\frac{3}{4} = \frac{19}{4}$ ist, so ergibt sich

$$4 \cdot 24y + 4 \cdot 500 = y \cdot 100 + 4 \cdot \tfrac{19}{4} \cdot 100,$$
oder $$4 \cdot 500 - 19 \cdot 100 = 100y - 96y,$$
oder $$100 = y(100 - 96),$$
oder $$100 = 4y,$$
so ist $$y = \frac{100}{4} = 25 \text{ Anker.}$$

Drückt man die quadratische Gleichung durch Zahlen aus, so findet man $y^2 - \frac{250}{49}y = \frac{24375}{49}$, und daraus ergibt sich der nämliche Werth von y.

Es sind also 100 Anker Wein eingekauft worden, der Anker zu $\frac{100}{5}$ oder 20 thlr., also beträgt die Ausgabe 2000 thlr.

Die Gleichung gehört zur Hauptform $x^2 - px = -q$. Es ist also

$$1)\ y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{160}{3}+\sqrt{\left(\frac{25600}{9}-\frac{6400}{3}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{160}{3}+\sqrt{\left(\frac{25600-19200}{9}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{160}{3}+\sqrt{\frac{6400}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{160}{3}+\frac{80}{3}}{2}$$

$$= \frac{240}{6} = 40 \text{ Anker.}$$

$$2)\ y = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{160}{3}-\frac{80}{3}}{2}$$

$$= \frac{80}{6} = 13\tfrac{1}{3} \text{ Anker.}$$

Daraus findet man die Werthe für x; es ist nämlich

$$x = \frac{my - mvt}{v} = \frac{m(y-vt)}{v}.$$

Ist also $y = 40$, so ist

$$x = \frac{10(40-\frac{5}{2}.4)}{\frac{5}{2}} = \frac{10(40-10)}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{10.30.2}{5} = \frac{600}{5}$$

$$= 120 \text{ Anker.}$$

Ist aber $y = 13\frac{1}{3}$, so ist

$$x = \frac{10\left(\frac{40}{3}-\frac{20}{2}\right)}{\frac{5}{2}} = \frac{10\left(\frac{40-30}{3}\right).2}{5}$$

$$= \frac{10.10.2}{3.5} = 13\tfrac{1}{3}.$$

Nach der ersten Annahme sind 120 Anker zu 12 thlr. gekauft worden, also die Einnahme = 1440 thlr. Zuerst wurden 40 Anker zu $\frac{40}{3}$ oder $13\frac{1}{3}$ thlr. verkauft, also war die Einnahme $= 40.\frac{40}{3} = \frac{1600}{3} = 533\frac{1}{3}$ thlr. Die übrigen 80 Anker wurden zu $\frac{40}{2\frac{1}{2}} = \frac{80}{5} = 16$ thlr. verkauft, daher war die Einnahme = 1280 thlr., folglich die ganze Einnahme

$= 1813\frac{1}{3}$ thlr. und der Gewinn $= 373\frac{1}{3}$ thlr., welcher $3\frac{1}{3}$ mal größer ist als 120. Hätte er allen Wein zu dem letztern Preise verkauft, so wäre die Einnahme $= 1920$ thlr., also der Gewinn $= 480$ thlr. gewesen, und dieser ist 4 mal größer als 120.

Nimmt man den zweiten Werth für y und x, so hat er $13\frac{1}{3}$ Anker, zu $\frac{13\frac{1}{3}}{10}$ oder $\frac{40}{30}$ oder $1\frac{1}{3}$ thlr. gekauft, also ist die Ausgabe $\frac{160}{9}$ oder $17\frac{7}{9}$ thlr. Nun verkauft er auch $13\frac{1}{3}$ Anker zu $\frac{13\frac{1}{3}}{3}$ oder $\frac{40}{9}$ oder $4\frac{4}{9}$ thlr., die Einnahme also $59\frac{7}{27}$ und da der Rest $= 0$ ist, also nichts weiter verkauft werden kann, so ist sein Gewinn $41\frac{2}{27}$ thlr. und dieser ist $3\frac{1}{3}$ mal größer als $13\frac{1}{3}$. Hätte er aber Alles zu $\frac{13\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}}$ oder $5\frac{1}{3}$ thlr. verkauft, so wäre die Einnahme $71\frac{1}{3}$ thlr., also der Gewinn $53\frac{1}{3}$ thlr. gewesen, und dieser ist 4 mal größer als $13\frac{1}{3}$.

XIX. Das 47ste Exempel S. 362. führt wieder zu einer quadratischen Gleichung. Es ist

$$-y^2pq + yq[p(2e-s)-e] = g - qe[p(s-e)+e],$$

oder

$$y^2pq - yq[p(2e-s)-e] = -g + qe[p(s-e)+e].$$

Also $y^2 - y\frac{q[p(2e-s)-e]}{pq} = \frac{qe[p(s-e)+e]-g}{pq}$.

Da nun $p = 8$, $q = 12$, $e = 50$, $s = 12\frac{1}{12} = \frac{145}{12}$ und $g = 8000$ ist, so ergibt sich die Gleichung

$$y^2 - y\frac{12[8(2\cdot 50 - \frac{145}{12}) - 50]}{8\cdot 12} = \frac{12\cdot 50[8(\frac{145}{12} - 50) + 50] - 8000}{8\cdot 12},$$

oder $y^2 - y\frac{8\cdot\frac{1055}{12} - \frac{600}{12}}{8} = \frac{12\cdot 50(8\cdot -\frac{455}{12} + 50) - 8000}{8\cdot 12}$,

oder $y^2 - y\frac{\frac{2110}{3} - \frac{150}{3}}{8} = \frac{600\cdot(-\frac{910}{3} + 50) - 8000}{8\cdot 12}$,

oder $y^2 - y\frac{1960}{8\cdot 3} = \frac{600\cdot -\frac{760}{3} - 8000}{8\cdot 12}$,

oder $y^2 - \frac{245}{3}y = \frac{-152000 - 8000}{8\cdot 12}$,

oder $y^2 - \frac{245}{3}y = -\frac{160000}{8\cdot 12}$,

oder $y^2 - \frac{245}{3}y = -\frac{5000}{3}$.

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Es iſt alſo

1) $y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} + \sqrt{[(\frac{245}{3})^2 - \frac{20000}{3}]}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} + \sqrt{(\frac{60025}{9} - \frac{60000}{9})}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} + \sqrt{\frac{25}{9}}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} + \frac{5}{3}}{2}$

$= \frac{250}{6} = 41\frac{2}{3}$ thlr.

2) $y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} - \sqrt{\frac{25}{9}}}{2}$

$= \frac{\frac{245}{3} - \frac{5}{3}}{2}$

$= \frac{240}{6} = 40$ thlr.

Da $x = \frac{k}{c - y}$ iſt, ſo iſt

1) $x = \frac{8000}{50 - 41\frac{2}{3}} = \frac{8000}{8\frac{1}{3}} = \frac{24000}{25} = 960$ Wſpl.

2) $x = \frac{8000}{50 - 40} = \frac{8000}{10} = 800$ Wſpl.

Nach den erſten Werthen für x und y ſind alſo 960 Wſpl. zu $41\frac{2}{3}$ thlr. eingekauft worden, daher die Ausgabe = 40000 thlr. Davon verkauft er $\frac{960}{8}$ oder 120 Wſpl. zu $\frac{960}{12\frac{1}{2}}$ oder 80 thlr., folglich die Einnahme = 9600 thlr. Die übrigen 840 Wſpl. werden zu 50 thlr. verkauft, alſo die Einnahme = 42000 thlr., folglich die ganze Einnahme = 51600, und daher der Gewinn = 11600 thlr., welcher $12\frac{1}{12}$ mal größer iſt als 960. Wäre Alles zu 50 thlr. verkauft worden, ſo wäre die Einnahme = 48000 thlr., alſo der Gewinn = 8000 thlr. geweſen.

Nach den zweiten Werthen für x und y hat er 800 Wſpl. gekauft, den Wiſpel zu 40 thlr., alſo die Ausgabe = 32000 thlr. Nun verkauft er zuerſt $\frac{800}{8}$ oder 100 Wſpl. zu $\frac{800}{12\frac{1}{2}}$ oder $66\frac{2}{3}$ thlr., alſo die Einnahme = $6666\frac{2}{3}$ thlr. Die übrigen 700 Wſpl. werden zu 50 thlr. verkauft, alſo die Einnahme = 35000 thlr., daher die ganze Einnahme = $41666\frac{2}{3}$ thlr. und der Gewinn

$= 9666\frac{2}{3}$ thlr., welcher $12\frac{1}{12}$ mal größer ist als 800. Wäre Alles zu 50 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme 40000 thlr., also der Gewinn 8000 thlr. gewesen.

XX. Das 48ste Exempel führt zu der quadratischen Gleichung

$$x^2 + xq[(b+t)(p-1) - pb] = pqf.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $q = 100$, $b = 2\frac{3}{4}$ thlr., $p = 3$, $t = 1\frac{1}{4}$. Daraus erhält man die Gleichung in Zahlen:

$x^2 + x \cdot 100\left[\left(\frac{11}{4} + \frac{5}{4}\right)(3-1) - 3 \cdot \frac{11}{4}\right] = 3 \cdot 100 \cdot 402,$

oder $x^2 + x \cdot 100\left(\frac{16}{4} \cdot 2 - \frac{33}{4}\right) = 120600,$

oder $x^2 + x \cdot 100\left(\frac{32}{4} - \frac{33}{4}\right) = 120600,$

oder $x^2 + x \cdot \left(100 \cdot -\frac{1}{4}\right) = 120600,$

oder $x^2 - 25x = 120600.$

Die Gleichung gehört zu der Form $x^2 - px = +q$. Also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{25 + \sqrt{(625 + 4 \cdot 120600)}}{2}$$

$$= \frac{25 + \sqrt{483025}}{2} = \frac{25 + 695}{2}$$

$$= \frac{720}{2} = 360 \text{ Ellen.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{25 - 695}{2} = -335 \text{ Ellen.}$$

Dieser Werth gibt keinen natürlichen Sinn, wir behalten also nur den ersten.

Da nun $y = b + t = 2\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} = 4$ thlr. ist, so ergibt sich folgende Auflösung:

Es sind 360 Ellen zu $2\frac{3}{4}$ thlr. gekauft worden, also die Ausgabe $= 990$ thlr. Davon wurde der dritte Theil oder 120 Ellen zu $\frac{360}{100}$ oder $3\frac{3}{5}$ thlr. verkauft, also die Einnahme $= 432$ thlr. Die übrigen 240 Ellen wurden zu 4 thlr. verkauft, also die Einnahme $= 960$ thlr., folglich die ganze Einnahme $= 1392$ thlr. und der Gewinn $= 402$ thlr. Wäre aber Alles zu 4 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme $= 1440$ thlr., also der Gewinn $= 450$ thlr. gewesen, und dieser ist $1\frac{1}{4}$ mal so groß als 360.

XXI. Das 49ste Exempel führt zu der quadratischen Gleichung

$$y^2 pr + yr[p[s(p+1) - d] - d] = g(p-1)^2 - r[ps(ps - 2d) + d^2],$$

oder

$$y^2 + y\,\frac{n[p[s(p+1)-d]-d]}{pr} = \frac{g(p-1)^2-r[ps(ps-2d)+d^2]}{pr},$$

oder

$$y^2 + y\,\frac{p[s(p+1)-d]-d}{p} = \frac{g(p-1)^2-r[ps(ps-2d)+d^2]}{pr}.$$

Nach den Zahlen des Exempels erhält man $p = \frac{5}{2}$, $d = 36$, $r = 8$, $s = 8\frac{2}{5} = \frac{42}{5}$, $g = 3200$ thlr., und daraus die Gleichung

$$y^2 + y\,\frac{\frac{5}{2}[\frac{42}{5}(\frac{5}{2}+1)-36]-36}{\frac{5}{2}} = \frac{3200(\frac{5}{2}-1)^2-8[\frac{5}{2}\cdot\frac{42}{5}(\frac{5}{2}\cdot\frac{42}{5}-2\cdot 36)+36^2]}{\frac{5}{2}\cdot 8},$$

oder $y^2 + y\,\frac{\frac{5}{2}(\frac{42}{5}\cdot\frac{7}{2}-36)-36}{\frac{5}{2}} = \frac{3200\cdot\frac{9}{4}-8[21(21-72)+1296]}{20},$

oder $y^2 + y\,\frac{\frac{5}{2}(\frac{147}{5}-\frac{180}{5})-36}{\frac{5}{2}} = \frac{7200-8(21\cdot-51+1296)}{20},$

oder $y^2 + y\,\frac{\frac{5}{2}\cdot-\frac{33}{5}-36}{\frac{5}{2}} = \frac{7200-8(-1071+1296)}{20},$

oder $y^2 + y\,\frac{-\frac{33}{2}-\frac{72}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{7200-8\cdot 225}{20},$

oder $y^2 + y\cdot-\frac{105}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{7200-1800}{20},$

oder $y^2 - 21y = \frac{5400}{20},$

folgl. $y^2 - 21y = 270.$

Dieſe Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = q$. Es iſt alſo

$$1)\ y = \frac{p+\sqrt{(p^2+4q)}}{2} = \frac{21+\sqrt{(441+4\cdot 270)}}{2} = \frac{21+\sqrt{(441+1080)}}{2} = \frac{21+\sqrt{1521}}{2} = \frac{21+39}{2} = \frac{60}{2} = 30\text{ thlr.}$$

2) y

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 + 49)}}{2}$$

$$= \frac{21 - 39}{2} = \frac{-18}{2} = -9.$$

Da dieser Werth für x keinen natürlichen Sinn gibt, so halten wir nur den ersten. Aus y findet sich x. Es ist nämlich

$$x = \frac{pry + prs - rd}{p - r}$$

$$= \frac{r(py + ps - d)}{p - r}$$

$$= \frac{r[p(y + s) - d]}{p - r}$$

Also in Zahlen

$$x = \frac{8[\frac{5}{2}(30 + 8\frac{2}{3}) - 36]}{\frac{5}{2} - 1}$$

$$= \frac{8(\frac{5}{2} \cdot 38\frac{2}{3} - 36)}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8(\frac{5}{2} \cdot \frac{192}{5} - 36)}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8(96 - 36) \cdot 2}{3}$$

$$= \frac{8 \cdot 60 \cdot 2}{3} = 8 \cdot 20 \cdot 2$$

$$= 320 \text{ Wspl.}$$

Es sind also 320 Wspl. zu 30 thlr. gekauft worden, daher die Ausgabe = 9600 thlr. Zuerst verkauft er $\frac{320}{2}$ oder $20 \cdot \frac{3}{3}$ Wspl. oder 128 Wspl. zu 36 thlr., also die Einnahme = 4600 thlr.; die übrigen 192 Wspl. aber zu $\frac{320}{8}$ oder 40 thlr., aber die Einnahme = 7680 thlr., folglich die ganze Einnahme = 12288 thlr., und daher der Gewinn = 2688 thlr., welcher $8\frac{2}{3}$ mal größer ist als 320. Wäre Alles zu 40 thlr. verkauft worden, so hätte die Einnahme 12800 thlr., also der Gewinn 3200 thlr. betragen.

XXII. Die beim 51sten Exempel S. 366. und 367. gefundene Gleichung ist

$$r^2(u - v) + yu[tr[v(p - 2) + u] - pvu] = -rt^2u^2v(p - 1).$$

Diese wird verwandelt in

$$y^2 + y\,\frac{u[tr[v(p - 2) + u] - pvu]}{r(u - v)} = -\frac{t^2u^2v(p - 1)}{u - v}$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $u = 130$, $p = \frac{1}{2}$, $r = 97\frac{1}{2} = \frac{195}{2}$, $r = 6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ und $t = 15$.

Also ergibt sich die Gleichung

$$y^2 + y\,\frac{130\left[15\cdot\frac{20}{3}\left[\frac{195}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right)+130\right]-\frac{5}{2}\cdot\frac{195}{2}\cdot 130\right]}{\frac{20}{3}\left(130-\frac{195}{2}\right)} = -\frac{15^2\cdot 130^2\cdot\frac{195}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)}{130-\frac{195}{2}},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{130\left[100\left(\frac{195}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{520}{4}\right)-\frac{195}{4}\cdot 650\right]}{\frac{20}{3}\left(\frac{260-195}{2}\right)} = -\frac{15^2\cdot 130^2\cdot\frac{195}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{260-195}{2}},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{130\left[100\left(\frac{195+520}{4}\right)-\frac{126750}{4}\right]}{\frac{20}{3}\cdot\frac{65}{2}} = -\frac{15^2\cdot 130^2\cdot 195\cdot 3}{4\cdot\frac{65}{2}},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{130\left(100\cdot\frac{715}{4}-\frac{126750}{4}\right)}{\frac{20\cdot 65}{6}} = -\frac{15\cdot 15\cdot 130\cdot 130\cdot 195\cdot 3}{2\cdot 65},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{130\left(\frac{71500-126750}{4}\right)\cdot 6}{20\cdot 65} = -15\cdot 15\cdot 2\cdot 65\cdot 195\cdot 3,$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{-130\cdot 55250\cdot 6}{4\cdot 20\cdot 65} = -17111250,$$

$$\text{oder}\quad y^2 - y\,\frac{16575}{2} = -17111250,$$

$$\text{oder}\quad y^2 - \frac{16575}{2}y = -17111250.$$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

$$1)\quad y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{16575}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{16575}{2}\right)^2-4\cdot 17111250\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{16575}{2}+\sqrt{\left(\frac{274730625}{4}-\frac{4\cdot 4\cdot 17111250}{4}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{16575}{2}+\sqrt{\frac{950625}{4}}}{2}$$

$$= \frac{16575+975}{4}$$

$$= \frac{17550}{4} = 4387\tfrac{1}{2}\ \text{thlr.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{\frac{16575}{2} - \sqrt{\frac{950625}{4}}}{2}$$
$$= \frac{16575 - 975}{4}$$
$$= \frac{15600}{4} = 3900 \text{ thlr.}$$

Aus diesen beiden Werthen ergibt sich nun ein doppelter Werth von x. Es ist nämlich

$$x = \frac{r(y + tu)}{u}.$$

Also
$$1)\ x = \frac{20}{3}\left(\frac{4387\frac{1}{2} + 15 \cdot 130}{130}\right)$$
$$= \frac{\frac{20}{3}\left(\frac{8775}{2} + \frac{3900}{2}\right)}{130}$$
$$= \frac{\frac{20}{3} \cdot \frac{12675}{2}}{130}$$
$$= \frac{2 \cdot 12675}{6 \cdot 13} = \frac{12675}{39}$$
$$= 325 \text{ Stn.}$$
$$2)\ x = \frac{\frac{20}{3}(3900 + 1950)}{130}$$
$$= \frac{20}{3}(30 + 15)$$
$$= 20(10 + 5) = 300 \text{ Stn.}$$

Nach den ersten Werthen hat er also 325 Stn. zu $\frac{4387\frac{1}{2}}{130}$ oder $33\frac{3}{4}$ thlr. eingekauft; die Ausgabe ist $10968\frac{3}{4}$ thlr. Nun hat er $\frac{2}{5} \cdot 325$ oder 130 Stn. zu $\frac{4387\frac{1}{2}}{\frac{195}{2}}$ oder 45 thlr. verkauft, also die Einnahme = 5850 thlr. Die übrigen 195 Stn. hat er zu $\frac{325}{6\frac{2}{3}}$ oder $48\frac{3}{4}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = $9506\frac{1}{4}$, daher die ganze Einnahme = $15356\frac{1}{4}$ thlr. und der Gewinn = $4387\frac{1}{2}$ thlr. Hätte er aber Alles zu $48\frac{3}{4}$ thlr. verkauft, so wäre die Einnahme = $15843\frac{3}{4}$ thlr. und der Gewinn = 4875 thlr. gewesen, welcher = $15 \cdot 325$ ist.

Nach den zweiten Werthen hat er 300 Stn. zu $\frac{3900}{130}$ oder 30 thlr. gekauft, die Einnahme also 9000 thlr. Davon verkauft er $\frac{2}{5}$ oder 120 Stn. zu $\frac{3000}{97\frac{1}{2}}$ oder 40 thlr., also die Ein-

nahme = 4800 thlr. Die übrigen 180 Stn. werden verkauft zu $\frac{300}{6\frac{2}{3}}$ oder 45 thlr., also die Einnahme = 8100 thlr. Die ganze Einnahme ist daher 12900 thlr., folglich der Gewinn 3900. Wäre Alles zu 45 thlr. verkauft worden, so hätte die Einnahme 13500 thlr. und der Gewinn 4500 thlr. betragen, welcher = 15.300 ist.

XXIII. Bei dem zum 55sten Exempel angeführten Nebenfalle S. 375. kommt die quadratische Gleichung

$$x^2(q-m)+x[pq(ms-u)+mu] = mupqs,$$

und daraus findet man

$$x^2+x\frac{pq(ms-u)+mu}{q-m} = \frac{mupqs}{q-m}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $m = 20$, $p = 3$, $q = 15$, $s = 8\frac{8}{9} = \frac{80}{9}$ und u wollen wir $133\frac{1}{3}$ setzen. Daraus erhält man die Gleichung

$$x^2+x\frac{3\cdot 15(20\cdot\frac{80}{9}-133\frac{1}{3})+\frac{20\cdot 400}{3}}{15-20} = \frac{20\cdot\frac{400}{3}\cdot 3\cdot 15\cdot\frac{80}{9}}{15-20},$$

$$\text{oder } x^2+x\frac{3\cdot 15(\frac{1600}{9}-\frac{1200}{9})+\frac{8000}{3}}{-5} = \frac{20\cdot\frac{400}{3}\cdot 3\cdot 15\cdot\frac{80}{9}}{-5},$$

$$\text{oder, } x^2+x\frac{3\cdot 15\cdot\frac{400}{9}+\frac{8000}{3}}{-5} = \frac{20\cdot 400}{3}\cdot\frac{5\cdot 80}{-5},$$

$$\text{oder } x^2+x\frac{5\cdot 400+\frac{8000}{3}}{-5} = \frac{20\cdot 400\cdot 5\cdot 80}{-15}$$

$$\text{oder } x^2-x\frac{1200+1600}{3} = \frac{20\cdot 400\cdot 80}{-3},$$

$$\text{oder } x^2-x\frac{2800}{3} = -\frac{640000}{3}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2-px = -q$. Es ist also

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2800}{3}+\sqrt{[(\frac{2800}{3})^2-\frac{2560000}{3}]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2800}{3}+\sqrt{(\frac{7840000}{9}-\frac{7680000}{9})}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{2800}{3} + \sqrt{\frac{1600000}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2800}{3} + \frac{400}{3}}{2}$$

$$= \frac{3200}{6} = 533\frac{1}{3} \text{ Stn.}$$

2) $$x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{2800}{3} - \frac{400}{3}}{2}$$

$$= \frac{2400}{6} = 400 \text{ Stn.}$$

Daraus ergeben sich die Werthe für y. Es war nach S. 375. $y = \frac{ux^2}{m(x-u)}$.

Also ist 1) $$y = \frac{133\frac{1}{3} \cdot (533\frac{1}{3})^2}{20(533\frac{1}{3} - 133\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\frac{400}{3} \cdot (\frac{1600}{3})^2}{20 \cdot 400}$$

$$= \frac{\frac{400}{3} \cdot \frac{2560000}{9}}{20 \cdot 400}$$

$$= \frac{1024000000}{3 \cdot 9 \cdot 20 \cdot 400} = \frac{128000}{3 \cdot 9}$$

$$= 4740\frac{20}{27}.$$

2) $$y = \frac{133\frac{1}{3} \cdot 400^2}{20(400 - 133\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{\frac{400}{3} \cdot 160000}{20 \cdot 266\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{64000000}{3 \cdot 20 \cdot \frac{800}{3}}$$

$$= \frac{64000000}{20 \cdot 800} = 4000 \text{ thlr.}$$

Nach den ersten Werthen für x und y wurden $533\frac{1}{3}$ Stn. zu $\frac{533\frac{1}{3}}{20}$ oder $26\frac{2}{3}$ thlr. gekauft, also die Ausgabe $= 14222\frac{2}{3}$ thlr. Davon wurden verkauft $\frac{533\frac{1}{3}}{3}$ oder $177\frac{7}{9}$ Stn. zu $\frac{533\frac{1}{3}}{15}$ oder $35\frac{5}{9}$ thlr., also die Einnahme $= 6320\frac{80}{81}$ thlr. Die übrigen $355\frac{5}{9}$ Stn. wurden zu $\frac{4740\frac{20}{27}}{133\frac{1}{3}}$ oder auch zu $35\frac{5}{9}$ thlr. verkauft,

also die Einnahme = $12641\frac{7}{81}$ thlr., und daher die ganze Einnahme = $18962\frac{2}{27}$ thlr., und folglich der Gewinn $4740\frac{2}{27}$ thlr.; dieser aber ist $8\frac{8}{9}$ mal größer als $533\frac{1}{3}$ Ztn. Wäre Alles zu diesem Preise verkauft worden, so wäre die Einnahme auch $18962\frac{2}{27}$ thlr. und der Gewinn $4740\frac{2}{27}$ thlr. gewesen.

Nach den anderen Werthen für x und y wurden 400 Ztn. zu $\frac{400}{20}$ oder 20 thlr. gekauft, also die Einnahme = 8000 thlr. Davon wurden $\frac{400}{3}$ oder $133\frac{1}{3}$ Ztn. zu $\frac{400}{15}$ oder $26\frac{2}{3}$ thlr. verkauft, also die Einnahme $3555\frac{5}{9}$ thlr. Die übrigen $266\frac{2}{3}$ Ztn. wurden zu $\frac{4000}{133\frac{1}{3}}$ oder 30 thlr. verkauft, also die Einnahme = 8000 thlr., daher die ganze Einnahme = $11555\frac{5}{9}$ thlr. und der Gewinn $3555\frac{5}{9}$ thlr., und dieser ist $8\frac{8}{9}$ mal größer als 400 Ztn. Hätte er aber Alles zu 30 thlr. verkauft, so wäre die Einnahme = 12000 thlr. und der Gewinn = 4000 thlr. gewesen.

XXIV. Beim 59sten Exempel, wo es achten Theil statt dritten Theil heißen muß, ist auch ein Nebenfall S. 384. angeführt, der folgende quadratische Gleichung gibt

$$y^3pqr(r-q)+yu[q[p[r[s[r-q(1+p)]+2u]-uq(2-p)]-u(2r-q)]+ur^2] = u^2p^2q^2s^2r.$$

Daraus ergibt sich

$$y^2+y\frac{u[q[p[r[s[r-q(1+p)]+2u]-uq(2-p)]-u(2r-q)]+ur^2]}{pqr(r-q)} = \frac{u^2p^2q^2s^2r}{pqr(r-q)},$$

oder

$$y^2+y\frac{u[q[p[r[s[r-q(1+p)]+2u]-uq(2-p)]-u(2r-q)]+ur^2]}{pqr(r-q)} = \frac{u^2pqs^2}{r-q}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist u = 400, p = 8, q = 400, r = 360, s = $\frac{19}{24}$.

Daraus ergibt sich die Gleichung in Zahlen

$$y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left[360\left[\frac{12}{24}\left[360-400(1+8)\right]+2.400\right]-400.400(2-8)\right]-400(2.360-400)\right]+400.360^2\right]}{8\cdot400\cdot360\,(360-400)}=\frac{400^2\cdot8\cdot400\cdot\left(\frac{12}{24}\right)^2}{360-400},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left[360\left[\frac{12}{24}\left[(360-400\cdot9)\right]+800\right]+960000\right]-400.320\right]+400.129600\right]}{8\cdot400\cdot360\cdot-40}=\frac{160000.8.\frac{400\cdot361}{576}}{-40},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left[360\left(\frac{12}{24}\cdot-3240+800\right)+960000\right]-128000\right]+51840000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{160000\cdot8\cdot400\cdot361}{40\cdot576},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left[360\left(-2565+800\right)+960000\right]-128000\right]+5180000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{160000\cdot400\cdot361}{5\cdot576},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left[(360\cdot-1765)+960000\right]-128000\right]+51840000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{4000\cdot400\cdot361}{72},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[8\left(-635400+960000\right)-128000\right]+51840000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{500\cdot400\cdot361}{9},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\left[(8\cdot324600)-128000\right]+51840000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{200000\cdot361}{9},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\left[400\,(2596800-128000)+51840000\right]}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{72200000}{9},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\,(400\cdot2468800+51840000)}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{72200000}{9},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{400\,(987520000+51840000)}{-8\cdot400\cdot360\cdot40}=-\frac{72200000}{9},$$

$$\text{oder } y^2+y\frac{1039360000}{-8\cdot360\cdot40}=-\frac{72200000}{9},$$

$$\text{oder } y^2-\frac{81200}{9}y=-\frac{72200000}{9}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

1) $y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} + \sqrt{\left(\frac{6593440000}{81} - \frac{4 \cdot 72200000}{9}\right)}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} + \sqrt{\left(\frac{6593440000}{81} - \frac{4 \cdot 9 \cdot 72200000}{81}\right)}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} + \sqrt{\frac{6593440000 - 2599200000}{81}}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} + \sqrt{\frac{3994240000}{81}}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} + \frac{63200}{9}}{2}$

$= \frac{144400}{18} = 8022\frac{2}{9}$ thlr.

2) $y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{81200}{9} - \frac{63200}{9}}{2}$

$= \frac{18000}{18} = 1000$ thlr.

Daraus findet man wieder einen doppelten Werth für x. Es ist nämlich

$$x = \frac{pqry + upqrs}{u[r + q(p-1)]}.$$

Es ist also

1) $x = \frac{8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot 8022\frac{2}{9} + 400 \cdot 8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot \frac{19}{24}}{400[360 + 400(8-1)]}$

$= \frac{8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot \frac{72200}{9} + 400 \cdot 8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot \frac{19}{24}}{400(360 + 400 \cdot 7)}$

$= \frac{8 \cdot 400 \cdot 40 \cdot 72200 + 400 \cdot 8 \cdot 400 \cdot 15 \cdot 19}{400 \cdot 3160}$

$= \frac{8 \cdot 40 \cdot 72200 + 8 \cdot 400 \cdot 15 \cdot 19}{3160}$

$= \frac{8 \cdot 72200 + 8 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 19}{79}$

$= \frac{600400}{79} = 7600$ Ellen.

2) $x = \frac{8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot 1000 + 400 \cdot 8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot \frac{19}{24}}{400[360 + 400(8-1)]}$

$= \frac{8 \cdot 400 \cdot 360 \cdot 1000 + 400 \cdot 8 \cdot 400 \cdot 15 \cdot 19}{400 \cdot 3160}$

$$x = \frac{8{\cdot}360{\cdot}1000 + 8{\cdot}400{\cdot}15{\cdot}19}{3160}$$
$$= \frac{8{\cdot}9{\cdot}1000 + 8{\cdot}10{\cdot}15{\cdot}19}{79}$$
$$= \frac{72000 + 23800}{79}$$
$$= \frac{94800}{79} = 1200 \text{ Ellen.}$$

Nach den ersten Werthen für x und y sind 7600 Ellen zu $\frac{8022\frac{2}{3}}{400}$ oder $20\frac{1}{18}$ thlr. gekauft worden; die Ausgabe war also $152422\frac{2}{3}$ thlr. Davon sind $\frac{7600}{8}$ oder 950 Ellen zu $\frac{7600}{400}$ oder 19 thlr. verkauft worden, daher die Einnahme = 18050 thlr. Die übrigen 6650 Ellen wurden zu $\frac{7600}{360}$ oder $21\frac{1}{9}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = $140388\frac{8}{9}$ thlr., folglich die ganze Einnahme = $158438\frac{8}{9}$ thlr., und daher der Gewinn = $6016\frac{2}{3}$ thlr., welcher $\frac{19}{24} \cdot 7600$ ist. Hätte er Alles zu $21\frac{1}{9}$ thlr. verkauft, so wäre die Einnahme = $160444\frac{4}{9}$ thlr., und der Gewinn = $8022\frac{2}{9}$ thlr. gewesen.

Nach den andern Werthen für x und y hat er 1200 Ellen zu $\frac{1000}{400}$ oder $2\frac{1}{2}$ thlr. gekauft, also die Ausgabe = 3000 thlr. Davon verkauft er $\frac{1200}{8}$ oder 150 Ellen zu $\frac{1200}{400}$ oder 3 thlr., folglich die Einnahme = 450 thlr. Die übrigen 1050 Ellen wurden zu $\frac{1200}{360}$ oder $3\frac{1}{3}$ thlr. verkauft; also die Einnahme = 3500 thlr., folglich die ganze Einnahme = 3950 thlr. und der Gewinn 950 thlr., welcher = $\frac{19}{24} \cdot 1200$ ist. Wäre Alles zu $3\frac{1}{3}$ thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme = 4000 thlr., also der Gewinn = 1000 thlr. gewesen.

XXV. In dem Exempel zum Nebenfalle S. 391. §. 265. sind Unrichtigkeiten in der Bezeichnung mit Buchstaben. Da die Waare = mx ist, so ist der Rest = mx — y und der mögliche Gewinn = tmx. Es ist also die erste Gleichung

$$mx^2 + tmx = mex,$$

oder $$mx + tm = me,$$

also $$mx = me - mt,$$

folglich $$x = e - t.$$

Die zweite Gleichung ist

$$mx^2 + f = \frac{y^2}{u} + mxe - ye.$$

Diese von der ersten abgezogen, bleibt

$$tmx - f = -\frac{y^2}{u} + ye,$$

oder $$\frac{y^2}{u} - ye = f - tmx,$$

und wenn man statt x den gefundenen Werth setzt, so kommt

$$\frac{y^2}{u} - ye = f - tm(e-t),$$

oder $$y^2 - uey = u[f - tm(e-t)].$$

Da nun $u = 8$, $e = 40$, $f = 4848$, $m = 20$ und $t = 10$ ist, so hat man in Zahlen die Gleichung

$$y^2 - 8.40y = 8(4848 - 10.20(40-10),$$

oder $$y^2 - 320y = 8(4848 - 200.30),$$

oder $$y^2 - 320y = 8.-1152$$
$$= -9216.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Es ist daher

1) $$y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{320 + \sqrt{(320^2 - 4.9216)}}{2}$$
$$= \frac{320 + \sqrt{(102400 - 36864)}}{2}$$
$$= \frac{320 + \sqrt{65536}}{2}$$
$$= \frac{320 + 256}{2}$$
$$= \frac{576}{2} = 288 \text{ Stn.}$$

2) $$y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{320 - 256}{2}$$
$$= \frac{64}{2} = 32 \text{ Stn.}$$

Da nun $x = e - t = 40 - 10 = 30$ thlr. ist, so ergeben sich folgende zwei Auflösungen:

Nach dem ersten Werthe von y sind 30.20 oder 600 Stn. zu 30 thlr. eingekauft und davon 288 Stn. zu $\frac{288}{8}$ oder 36 thlr. und die übrigen 312 Stn. zu 40 thlr. verkauft worden. Die Ausgabe war also 18000 thlr., die erste Einnahme 10368 thlr. und die zweite 12480 thlr., also die ganze Einnahme = 22848, folglich der Gewinn = 4848 thlr. Wäre aber Alles zu 40 verkauft worden, so wäre die Einnahme = 24000 thlr., also der Gewinn = 6000 thlr. gewesen, welcher = 10.600 ist.

Nach dem zweiten Werthe für y hat er auch 600 Stn. zu 30 thlr. eingekauft, davon aber 32 Stn. zu $\frac{32}{8}$ oder 4 thlr. und die übrigen 568 Stn. zu 40 thlr. verkauft. Die Ausgabe ist wieder 18000 thlr., die erste Einnahme 128 thlr. und die

weite 22720 thlr., also die ganze Einnahme = 22848, und daher der Gewinn 4848 thlr. Der mögliche Gewinn kommt wie vorher.

XXVI. Das 10te Exempel S. 402. gibt folgende quadratische Gleichungen

$$1)\ mx^2 + y = \frac{mxy}{p},$$

und

$$2)\ mx^2 + f = qdx + \frac{mxy}{p} - \frac{qxy}{p}.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so erhält man

$$y - f = \frac{qxy}{p} - qdx,$$

oder

$$py - pf = qxy - pqdx,$$

also

$$py - pf = x(qy - pqd),$$

folglich

$$\frac{py - pf}{py - pqd} = x.$$

Diesen Werth für x setze man in die Gleichung

$$mx^2 + y = \frac{mxy}{p},$$

oder

$$pmx^2 + py = mxy,$$

oder

$$pmx^2 - mxy = -py.$$

Es ist nämlich

$$x^2 = \left(\frac{py - pf}{qy - pqd}\right)^2 = \frac{p^2y^2 - 2p^2fy + p^2f^2}{q^2y^2 - 2pq^2dy + p^2q^2d^2}.$$

Also $pmx^2 = \frac{mp^3y^2 - 2mp^3fy + mp^3f^2}{q^2y^2 - 2pq^2dy + p^2q^2d^2}$.

Ferner ist $mxy = \frac{mpy^2 - mpfy}{qy - pqd}$.

Und daraus ergibt sich die Gleichung

$$\frac{mp^3y^2 - 2mp^3fy + mp^3f^2}{q^2y^2 - 2pq^2dy + p^2q^2d^2} - \frac{mpy^2 - mpfy}{qy - pqd} = -py.$$

Nun bringe man alle Glieder auf einerlei Nenner, nämlich auf den, welchen das erste Glied linker Hand hat. Zu dem Ende lasse man den Zähler dieses ersten Gliedes unverändert, multiplizire das zweite Glied mit $qy - pqd$ und das Glied der rechten Seite mit $q^2y^2 - 2q^2pdy + q^2p^2d^2$, so bekommen alle Glieder den Nenner des ersten und man braucht folglich nur noch die Zähler hinzuschreiben. Es kommt

$$mp^3y^2 - 2mp^3fy + mp^3f^2 - mpqy^2 + y^2(mp^2qd + mpfq) - mp^2qdfy = -pq^2y^3 + 2q^2p^2dy^2 - q^2p^3d^2y.$$

Dividirt man alle Glieder durch p und ordnet sie dann nach den Potenzen von y, so erhält man

$$q^2y^3 - mqy^2 + y^2p^2m + y^2(mpqd + mfq) - y^2q^2pd + q^2p^2d^2 - 2p^2mfy - mpqdfy = -p^2mf^2.$$

Daraus erhält man durch Anwendung der Klammer

$$y^3q(q-m) + y^2(p^2m + mpqd + mfq - 2q^2pd) + y(q^2p^2d^2 - 2p^2mf - mpqdf) = -p^2mf^2,$$

oder

$$y^3q(q-m) + y^2[m(p^2 + fq) + pqd(m-2q)] + y[p[qd(qpd - mf)] - 2pmf] = -p^2mf^2.$$

Dividirt man nun mit dem Koeffizienten von y^3, so erhält man die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2\frac{m(p^2+qf)+pqd(m-2q)}{q(q-m)} + y\frac{p[qd(qpd-mf)-2pmf]}{q(q-m)} = -\frac{p^2mf^2}{q(q-m)}.$$

Von der Auflösung dieser kubischen Gleichung werden wir unten sprechen.

XXVII. Das 12te Exempel S. 404. gibt folgende quadratische Gleichung

$$y^2[am(1-m)] + ya[mq - b(1-m)] = q(f+ab).$$

Mit dem Koeffizienten von y^2 dividirt, kommt

$$y^2 + y\frac{a[mq-b(1-m)]}{am(1-m)} = \frac{q(f+ab)}{am(1-m)},$$

oder

$$y^2 + y\frac{mq-b(1-m)}{m(1-m)} = \frac{q(f+ab)}{am(1-m)}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $a = 800$, $b = 3$, $m = 1\frac{1}{3}$, $f = 266\frac{2}{3}$ (wie es statt 400 heißen muß) und $q = 1\frac{1}{2}$. Also hat man die Gleichung

$$y^2 + y\frac{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2} - 3(1-\frac{4}{3})}{\frac{4}{3}(1-\frac{4}{3})} = \frac{\frac{3}{2}(266\frac{2}{3}+800\cdot 3)}{800\cdot\frac{4}{3}(1-\frac{4}{3})},$$

oder

$$y^2 + y\frac{2-3\cdot-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}\cdot-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 2666\frac{2}{3}}{800\cdot\frac{4}{3}\cdot-\frac{1}{3}},$$

oder

$$y^2 + y\frac{2+\frac{3}{3}}{-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{8000}{3}}{-\frac{3200}{9}},$$

oder

$$y^2 + y\frac{3}{-\frac{4}{9}} = \frac{4000\cdot 9}{-3200},$$

oder

$$y^2 - 3\cdot\frac{9}{4}y = -\frac{5\cdot 9}{4},$$

oder

$$y^2 - \frac{27}{4}y = -\frac{45}{4}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; es ist also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{27}{4} + \sqrt{(\frac{729}{16} - 45)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{27}{4} + \sqrt{\frac{729 - 720}{16}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{27}{4} + \sqrt{\frac{9}{16}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{27}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{30}{8} = 3\frac{3}{4} \text{ thlr.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{27}{4} - \frac{3}{4}}{2} = \frac{24}{8} = 3.$$

Aus den doppelten Werthen von y ergibt sich auch ein doppelter Werth von x. Es war nämlich

$$x = \frac{s(my - b)}{q}.$$

Also

$$1)\ x = \frac{800(\frac{3}{4} \cdot 3\frac{3}{4} - 3)}{1\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{800(\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4} - 3)}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{800(5 - 3) \cdot 2}{3}$$

$$= \frac{800 \cdot 2 \cdot 2}{3} = \frac{3200}{3}$$

$$= 1066\frac{2}{3} \text{ Ellen.}$$

$$2)\ x = \frac{800(\frac{3}{4} \cdot 3 - 3)}{1\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{800(4 - 3)}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{800 \cdot 2}{3} = 533\frac{1}{3} \text{ Ellen.}$$

Die Werthe $x = 533\frac{1}{3}$ und $y = 3$ thlr. geben die natürlichste Auflösung. Es sind also 800 Ellen gekauft worden, die Elle zu 3 thlr., folglich ist die Ausgabe = 2400 thlr. Nun verkauft er $533\frac{1}{3}$ Ellen auch zu 3 thlr., also die Einnahme = 1600 thlr. Die übrigen $266\frac{2}{3}$ Ellen werden zu $3 \cdot \frac{4}{3}$ oder 4 thlr.

verkauft, also die Einnahme $= 1066\frac{2}{3}$ thlr., folglich die ganze Einnahme $= 2666\frac{2}{3}$ thlr., daher der Gewinn $= 266\frac{2}{3}$ thlr. Alles zu 4 thlr. verkauft, wäre die Einnahme 3200 thlr., also der Gewinn $=$ 800 thlr. gewesen, und dieser ist $1\frac{1}{2}$ mal größer als $533\frac{1}{3}$ Elle.

Nach den andern Werthen von x und y wurden auch für die 800 Ellen 2400 thlr. ausgegeben; es wurden aber $1066\frac{2}{3}$ Ellen zu $3\frac{3}{4}$ thlr. verkauft, also war die Einnahme $=$ 4000 thlr. Da er aber nur 800 Ellen hatte, so hat er noch $266\frac{2}{3}$ Ellen dazu kaufen müssen, und zwar zu $3\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$ oder 5 thlr.; diese kosteten ihm daher $1333\frac{1}{3}$ thlr. Diese Ausgabe muß man also von der Einnahme 4000 thlr. abziehen, dann bleibt die reine Einnahme $= 2666\frac{2}{3}$ thlr., und folglich ist der Gewinn $266\frac{2}{3}$ thlr. Hätte er aber die 800 Ellen zu diesem Einkaufspreise von 5 thlr. verkauft, so wäre die Einnahme $=$ 4000 thlr., also der Gewinn 1600 thlr. gewesen, und dieser ist auch $= 1066\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$.

XXVIII. Bei dem 14ten Exempel S. 406. kommt die quadratische Gleichung

$$x^2(a-q) - abmx = m[f(a-q) - abq].$$

Daraus ergibt sich

$$x^2 - x\frac{abm}{a-q} = \frac{m[f(a-q)-abq]}{a-q},$$

oder $$x^2 - x\frac{abm}{a-q} = \frac{mf(a-q)-mabq}{a-q},$$

oder $$x^2 - x\frac{abm}{a-q} = mf - \frac{mabq}{a-q}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $a = 100$ Ztn., $f = 1558\frac{1}{3}$ thlr., $b = \frac{1}{4}$ thlr. für das Pfund, also für den Zentner $= \frac{110}{4}$ thlr.; q sei $= 40$ und $m = \frac{9}{11}$ auch in Beziehung auf den Zentner, so erhält man folgende Gleichung in Zahlen

$$x^2 - x\frac{100 \cdot \frac{110}{4} \cdot \frac{9}{11}}{100-40} = \frac{9}{11} \cdot 1558\tfrac{1}{3} - \frac{\frac{9}{11} \cdot 100 \cdot \frac{110}{4} \cdot 40}{100-40},$$

oder $$x^2 - x\frac{100 \cdot 110 \cdot 9}{4 \cdot 11 \cdot 60} = \frac{9 \cdot 4675}{11 \cdot 3} - \frac{9 \cdot 100 \cdot 110 \cdot 40}{11 \cdot 4 \cdot 60},$$

oder $$x^2 - x\frac{5 \cdot 10 \cdot 3}{4} = 3 \cdot 425 - 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10,$$

oder $$x^2 - \frac{75}{2}x = 1275 - 1500,$$

oder $$x^2 - \frac{75}{2}x = -225.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$, und es ist also

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{75}{2}+\sqrt{(\frac{5625}{4}-4\cdot 225)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{75}{2}+\sqrt{(\frac{5625-3600}{4})}}{2}$$

$$= \frac{\frac{75}{2}+\sqrt{2025}}{2}$$

$$= \frac{\frac{75}{2}+\frac{45}{2}}{2}$$

$$= \frac{120}{4} = 30 \text{ Ztn.}$$

$$2)\ x = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{75}{2}-\frac{45}{2}}{2} = \frac{75-45}{4}$$

$$= \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} \text{ Ztn.}$$

Da nun $y = \frac{ab}{a-q} = \frac{100 \cdot \frac{110}{4}}{100-40} = \frac{25 \cdot 110}{60} = \frac{275}{6} = 45\frac{5}{6}$ thlr. ist, so ergeben sich folgende zwei Auflösungen:

1) Es sind 100 Ztn. gekauft worden, das Pfund zu 6 gr., also die Ausgabe = 2750 thlr. Davon hat er verkauft 30 Ztn. zu $\frac{30}{\frac{9}{11}} = \frac{330}{9} = 36\frac{2}{3}$ thlr., also die Einnahme = 1100 thlr. Die übrigen 70 Ztn. wurden der Zentner zu $45\frac{5}{6}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = $3208\frac{1}{3}$ thlr., folglich die ganze Einnahme = $4308\frac{1}{3}$, und daher der Gewinn = $1558\frac{1}{3}$ thlr. Wäre aber Alles zu diesem Preise verkauft worden, so wäre die Einnahme = $4583\frac{1}{3}$ thlr. und der Gewinn = $1833\frac{1}{3}$ thlr. gewesen, welcher 40 mal größer ist als $45\frac{5}{6}$.

2) Es sind 100 Ztn. zu $\frac{1}{4}$ thlr. das Pfund gekauft worden, also die Ausgabe = 2750 thlr. Davon sind $7\frac{1}{2}$ Ztn. der Zenther zu $\frac{7\frac{1}{2}}{\frac{9}{11}} = \frac{15 \cdot 11}{2 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 11}{6} = 9\frac{1}{6}$ thlr. verkauft worden, also die Einnahme = $68\frac{3}{4}$ thlr. Die übrigen $92\frac{1}{2}$ Ztn. aber wurden zu $45\frac{5}{6}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = $4239\frac{7}{12}$ thlr., und daher die ganze Einnahme = $4308\frac{1}{3}$ und der Gewinn = $1558\frac{1}{3}$ thlr. Der mögliche Gewinn kommt wie vorher.

XXIX. Auch bei dem 17ten Exempel S. 409. und 410. hat sich eine quadratische Gleichung gefunden. Es ist nämlich

$$qx^2 - qmex = -a(e-b)m(q-1),$$

oder $$x^2 - mex = \frac{-a(e-b)m(q-1)}{q}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $a = 840$ Ztn., $b = \frac{1}{3}$ thlr. für das Pfund, also $\frac{110}{3}$ für den Zentner, $e = \frac{25}{48}$ für das Pfund, also $\frac{55 \cdot 25}{24}$ für den Zentner, $f = 14116\frac{2}{3}$ thlr. Ist nun $m = \frac{336}{55}$ und $q = \frac{27}{22}$, so ergibt sich folgende Gleichung

$$x^2 - \frac{336}{55} \cdot \frac{55 \cdot 25}{24} x = -\frac{840\left(\frac{55 \cdot 25}{24} - \frac{110}{3}\right)\frac{336}{55}\left(\frac{27}{22} - 1\right)}{\frac{27}{22}},$$

$$\text{oder } x^2 - \frac{336 \cdot 25}{24} x = -\frac{840\left(\frac{1375 - 880}{24}\right)\frac{336}{55}\left(\frac{27 - 22}{22}\right)}{\frac{27}{22}},$$

$$\text{oder } x^2 - 14.25x = -\frac{\frac{840 \cdot 495 \cdot 336 \cdot 5}{24 \cdot 55 \cdot 22}}{\frac{27}{22}}$$

$$\text{oder } x^2 - 350x = -\frac{840 \cdot 495 \cdot 336 \cdot 5 \cdot 22}{24 \cdot 55 \cdot 22 \cdot 27},$$

$$\text{oder } x^2 - 350x = -35 \cdot 9 \cdot \frac{112}{9} \cdot 5,$$

$$\text{oder } x^2 - 350x = -35 \cdot 112 \cdot 5,$$

$$\text{oder } x^2 - 350x = -19600.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Es ist also

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{350 + \sqrt{350^2 - 4 \cdot 19600)}}{2}$$

$$= \frac{350 + \sqrt{(122500 - 78400)}}{2}$$

$$= \frac{350 + \sqrt{44100}}{2}$$

$$= \frac{350 + 210}{2}$$

$$= \frac{560}{2} = 280 \text{ Ztn.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{350 - 210}{2}$$

$$= \frac{140}{2} = 70 \text{ Ztn.}$$

Für y kommt der beständige Werth

$$a(e-b) = 840\left(\frac{55 \cdot 25}{24} - \frac{110}{3}\right) = 840\left(\frac{1375 - 880}{24}\right)$$

$$= \frac{840 \cdot 495}{24} = 35 \cdot 495 = 17325 \text{ thlr.}$$

Es

Es sind also 840 Ztn., das Pfund zu $\frac{1}{2}$ thlr., gekauft worden, folglich die Ausgabe 30800 thlr. Wurden nun davon 280 Ztn., der Zentner zu $\frac{280}{\frac{6\cdot 56}{55}} = \frac{280\cdot 55}{6\cdot 56} = \frac{5\cdot 55}{6} = 45\frac{5}{6}$ thlr. verkauft, so ist die Einnahme $= 12833\frac{1}{3}$ thlr., für die übrigen 560 Ztn. aber, welche zu $\frac{55\cdot 25}{24}$ thlr. verkauft wurden, 3208$3\frac{1}{3}$ thlr., also die ganze Einnahme $= 44916\frac{2}{3}$ thlr., und folglich der Gewinn $= 14116\frac{2}{3}$ thlr. Würde die ganze Waare zu dem letzten Preise verkauft, so war die Einnahme $= 38125$ thlr., und daher der Gewinn $= 17325$ thlr.

Sind zuerst 70 Ztn. verkauft worden, so kostet der Zentner $\frac{70}{\frac{5\cdot 56}{55}} = \frac{70\cdot 55}{6\cdot 56} = \frac{5\cdot 55}{6\cdot 4} = 47\frac{5}{24}$ thlr., also ist die Einnahme $= 802\frac{1}{12}$ thlr.; für die übrigen 770 Ztn. nimmt er aber $14114\frac{7}{12}$ ein, folglich ist die ganze Einnahme $= 44916\frac{2}{3}$ thlr., und daher der Gewinn auch $14116\frac{2}{3}$ thlr.

XXX. Der Nebenfall S. 428. zum 29sten Exempel S. 426. führt auf folgende quadratische Gleichung:

$$y^2 + y\,[pq + r(q-p)] + y\,[pq(r-q)(b+m) - q^2rb] = pq^2mrb.$$

Daraus folgt

$$y^2 + y\,\frac{pq(r-q)(b+m) - q^2rb}{pq + r(q-p)} = \frac{pq^2mrb}{pq + r(q-p)}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $b = 30$, $r = 260$; ist nun $p = \frac{860}{9}$, $q = 86$, $m = \frac{200}{7}$, so erhält man die Gleichung

$$y^2 + y\,\frac{\frac{860\cdot 86}{9}(260-86)(30+\frac{200}{7}) - 86^2\cdot 260\cdot 30}{\frac{860\cdot 86}{9} + 260(86-\frac{860}{9})} = \frac{\frac{860\cdot 86^2}{9}\cdot\frac{200}{7}\cdot 260\cdot 30}{\frac{860\cdot 86}{9} + 260(86-\frac{860}{9})},$$

oder

$$y^2 + y\,\frac{\frac{73960}{9}\cdot 174\cdot\frac{410}{7} - 7396\cdot 7800}{\frac{73960}{9} + 260\,(\frac{774-860}{9})} = \frac{\frac{860\cdot 7396}{9}\cdot\frac{200}{7}\cdot 260\cdot 30}{\frac{73960}{9} + 260\,(\frac{774-860}{9})},$$

oder

$$y^2 + y\,\frac{\frac{73960\cdot 71340}{63} - 57688800}{\frac{73960}{9} + \frac{260\cdot -86}{9}} = \frac{\frac{992247360000}{63}}{\frac{73960}{9} + \frac{260\cdot -86}{9}},$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{\frac{5276306400}{63} - \frac{57688800 \cdot 63}{63}}{\frac{73960 - 22360}{9}} = \frac{\frac{992247360000}{63}}{\frac{73960 - 22360}{9}}$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{\frac{164191200}{63}}{\frac{51600}{9}} = \frac{\frac{992247360000}{63}}{\frac{51600}{9}}$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{164191200 \cdot 9}{63 \cdot 51600} = \frac{992247360000 \cdot 9}{63 \cdot 51600}$$

$$\text{oder } y^2 + y\,\frac{31820}{7} = \frac{192296000}{7}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$. Es ist daher

$$1)\ y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{31820}{7} + \sqrt{\left[\left(\frac{31820}{7}\right)^2 + 4 \cdot \frac{192296000}{7}\right]}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{31820}{7} + \sqrt{\left(\frac{1012512400}{49} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 192296000}{49}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{31820}{7} + \sqrt{\frac{6396800400}{49}}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{31820}{7} + \frac{79980}{7}}{2}$$

$$= \frac{48160}{14}$$

$$= 3440 \text{ thlr.}$$

$$2)\ y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{31820}{7} - \frac{79980}{7}}{2}$$

$$= \frac{-111800}{14}$$

$$= -7985\tfrac{5}{7} \text{ thlr.}$$

Dieser zweite negative Werth von y zeigt nicht Gewinn, sondern Verlust an.

Aus den zwei Werthen für y fließen auch zwei Werthe für x. Es ist nämlich

$$x = \frac{r(y - qb)}{q(b + m) - y}.$$

Nimmt man also für y den ersten Werth, so ist

$$x = \frac{260(3440 - 86.30)}{86(30 + \frac{200}{7}) - 3440}$$
$$= \frac{260(3440 - 2580)}{86 \cdot \frac{410}{7} - 3440}$$
$$= \frac{260 \cdot 860}{\frac{35260}{7} - \frac{24080}{7}}$$
$$= \frac{260 \cdot 860}{\frac{11180}{7}}$$
$$= \frac{260 \cdot 860 \cdot 7}{11180}$$
$$= \frac{860 \cdot 7}{43} = 20 \cdot 7 = 140 \text{ Ztn.}$$

Nimmt man den zweiten negativen Werth für y, so ist

$$x = \frac{260(-7985\frac{5}{7} - 86 \cdot 30)}{86(30 + \frac{200}{7}) + 7985\frac{5}{7}}$$
$$= \frac{-260(\frac{55900}{7} + \frac{18060}{7})}{86 \cdot \frac{410}{7} + \frac{55900}{7}}$$
$$= \frac{-260 \cdot 73960}{35260 + 55900}$$
$$= -\frac{19229600}{91160}$$
$$= -210\frac{50}{73} \text{ Ztn.}$$

Die zweiten Werthe für x und y geben nur unnatürliche Auflösungen, daher wir sie übergehen. Nach den ersten Werthen aber hat er 140 + 260 Ztn. = 400 Ztn. eingekauft und zwar zu 30 thlr., die Ausgabe also = 12000 thlr. Dann hat er 140 Ztn. zu $\frac{3440}{\frac{860}{9}} = \frac{3440 \cdot 9}{860} = 36$ thlr. verkauft, die Einnahme war also 5040 thlr. Die übrigen 260 Ztn. verkaufte er zu $\frac{3440}{86} = 40$ thlr., also ist die Einnahme = 10400 thlr., daher die ganze Einnahme = 15440 thlr., folglich der Gewinn = 3440 thlr. Hätte er Alles zu 40 thlr. verkauft, so wären 16000 thlr. eingenommen worden, also der Gewinn = 4000 thlr. gewesen, und dieser ist $\frac{29}{25}$ mal größer als 3440 thlr.

XXXI. Das 31ste Exempel S. 430. führt auch auf eine quadratische Gleichung. Aus der Gleichung

$$\frac{rx}{m} + \frac{x^2}{m} + \frac{y}{s} = \frac{x^2}{p} + \frac{ry}{q}$$

läßt sich ein Werth für y bestimmen. Bringt man nämlich alle

Glieder auf einerlei Nenner und läßt dann die Nenner weg, so erhält man

$$pqrsx + pqsx^2 + mpqy = msqx^2 + mspry.$$

Daraus wird durch Versetzung

$$pqsx^2 - msqx^2 + pqrsx = mspsy - mpqy,$$

oder $x^2(pqs - msq) + xpqrs = y(mspr - mpq)$,

oder $x^2qs(p - m) + xpqrs = ymp(sr - q)$.

Also $$\frac{x^2qs(p-m)+xpqrs}{mp(sr-q)} = y.$$

Diesen Werth für y setze man nun in die Gleichung

$$y - \frac{y}{s} = \frac{xy}{q} - \frac{x^2}{p}.$$

Bringt man nämlich diese unter einerlei Nenner und ordnet die Glieder so, daß die mit y auf Eine Seite kommen, so erhält man 1) $pqsy - pqy = psxy - qsx^2$,

und daraus 2) $pqsy - pqy - psxy = -qsx^2$,

oder $yp(qs - q - sx) = -qsx^2$,

oder $yp[q(s-1) - sx] = -qsx^2$.

Nun setze man statt y den obigen Werth, so kommt

$$\left(\frac{x^2qs(p-m)+xpqrs}{mp(sr-q)}\right).[p[q(s-1)-sx]] = -qsx^2,$$

oder $$\frac{[x^2qs(p-m)+xpqrs].[q(s-1)-sx]}{m(sr-q)} = -qsx^2.$$

Multiplizirt man die beiden Faktoren des Zählers, nämlich $x^2qs(p-m)+xpqrs$ und $q(s-1)-sx$ wirklich mit einander, so erhält man

$$\frac{x^2q^2s(p-m)(s-1) - x^3qs^2(p-m) + xpq^2rs(s-1) - x^2pqrs^2}{m(sr-q)} = -qsx^2,$$

und bringt man nun das Hauptglied rechts auch auf den Nenner des linken, so ergibt sich

$$x^2q^2s(p-m)(s-1) - x^3qs^2(p-m) + xpq^2rs(s-1) - pqrs^2x^2 = -m(sr-q)qsx^2.$$

Jetzt lassen sich alle Glieder durch qsx dividiren, dies gibt

$$xq(p-m)(s-1) - x^2s(p-m) + pqr(s-1) - prsx = -m(sr-q)x.$$

Man ordne die Glieder nach den Potenzen von x und bringe diejenigen, wo x der gemeinschaftliche Faktor ist, zusammen, so kommt

$$-x^2s(p-m) + x[q(p-m)(s-1) - prs + m(sr-q)] = -pqr(s-1),$$

oder

$$x^2s(p-m) - x[q(p-m)(s-1) - prs + m(sr-q)] = pqr(s-1).$$

Endlich dividire man mit dem Koeffizienten von x^2, so erhält man

$$x^2 - x\,\frac{q(p-m)(s-1)-prs+m(sr-q)}{s(p-m)} = \frac{pqr(s-1)}{s(p-m)}.$$

Nach den Zahlen des 30sten Exempels ist $r = 480$, und setzt man nun $m = \frac{320}{3}$, $p = \frac{256}{3}$, $q = 224$ und $s = \frac{7}{6}$, so erhält man in Zahlen

$$x^2 - x\,\frac{224(\frac{256}{3}-\frac{320}{3})(\frac{7}{6}-1)-\frac{256}{3}\cdot 480\cdot\frac{7}{6}+\frac{320}{3}(\frac{7}{6}\cdot 480-224)}{\frac{7}{6}(\frac{256}{3}-\frac{320}{3})}$$

$$= \frac{\frac{256}{3}\cdot 224\cdot 480(\frac{7}{6}-1)}{\frac{7}{6}(\frac{256}{3}-\frac{320}{3})},$$

$$\text{oder } x^2 - x\,\frac{224\cdot -\frac{64}{3}\cdot\frac{1}{6}-\frac{256\cdot 80\cdot 7}{3}+\frac{320}{3}(7\cdot 80-224)}{\frac{7}{6}\cdot -\frac{64}{3}}$$

$$= \frac{\frac{256\cdot 224\cdot 480}{3\cdot 6}}{\frac{7}{6}\cdot -\frac{64}{3}},$$

$$\text{oder } x^2 - x\,\frac{\frac{-7168}{9}-\frac{143360}{3}+\frac{320}{3}(560-224)}{-\frac{224}{9}}$$

$$= \frac{\frac{4587520}{3}}{-\frac{224}{9}},$$

$$\text{oder } x^2 - x\,\frac{\frac{-437248}{9}+\frac{322560}{9}}{-\frac{224}{9}} = -\frac{4587520}{3}\cdot\frac{9}{224},$$

$$\text{oder } x^2 - x\,\frac{114688}{9}\cdot\frac{9}{224} = -\frac{13762560}{224},$$

$$\text{oder } x^2 - x\,\frac{114688}{224} = -\frac{13762560}{224},$$

$$\text{oder } x^2 - 512x = -61440.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; und es ist also

1) $$x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{512+\sqrt{512^2-4\cdot 61440)}}{2}$$

$$= \frac{512+\sqrt{(262144-245760)}}{2}$$

$$= \frac{512+\sqrt{16384}}{2}$$

$$= \frac{512+128}{2} = \frac{640}{2} = 320 \text{ Ellen.}$$

2) $$x = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{512-128}{2} = \frac{384}{2} = 192 \text{ Ellen.}$$

Aus diesen beiden Werthen von x findet man auch eine doppelten Werth für y. Es war nämlich

$$y = \frac{qs(p-m)x^2 + pqrsx}{mp(sr-q)}.$$

Nach dem ersten Werthe für x ist also

$$y = \frac{224 \cdot \frac{7}{6}(\frac{256}{3} - \frac{320}{3}) \cdot 320^2 + \frac{256}{3} \cdot 224 \cdot 480 \cdot \frac{7}{6} \cdot 32}{\frac{320}{3} \cdot \frac{256}{3}(\frac{7}{6} \cdot 480 - 224)}$$

$$= \frac{224 \cdot \frac{7}{6} \cdot -\frac{64}{3} \cdot 102400 + \frac{256}{3} \cdot 224 \cdot 80 \cdot 7 \cdot 320}{\frac{320}{3} \cdot \frac{256}{3} \cdot 336}$$

$$= \frac{\frac{-224 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 102400}{9} + \frac{256 \cdot 224 \cdot 80 \cdot 7 \cdot 320 \cdot 3}{9}}{\frac{320 \cdot 256 \cdot 336}{9}}$$

$$= \frac{-224 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 102400 + 256 \cdot 224 \cdot 80 \cdot 7 \cdot 320 \cdot 3}{320 \cdot 256 \cdot 336}$$

$$= \frac{-2 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 320 + 256 \cdot 2 \cdot 80 \cdot 7 \cdot 3}{256 \cdot 3}$$

$$= \frac{-2 \cdot 7 \cdot 40 + 2 \cdot 80 \cdot 7 \cdot 3}{3}$$

$$= \frac{-560 + 3360}{3} = \frac{2800}{3}$$

$$= 933\tfrac{1}{3} \text{ thlr.}$$

Nach dem zweiten Werthe für x ist

$$y = \frac{224 \cdot \frac{7}{6}(\frac{256}{3} - \frac{320}{3}) 192 \cdot 192 + \frac{256}{3} \cdot 224 \cdot 480 \cdot \frac{7}{6} \cdot 19}{\frac{320}{3} \cdot \frac{256}{3}(\frac{7}{6} \cdot 480 - 224)}$$

$$= \frac{224 \cdot \frac{7}{6} \cdot -\frac{64}{3} \cdot 192 \cdot 192 + \frac{256}{3} \cdot 224 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 32}{\frac{320}{3} \cdot \frac{256}{3}(560 - 224)}$$

$$= \frac{\frac{-224 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 192 \cdot 192}{9} + \frac{256 \cdot 224 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 3}{9}}{\frac{320 \cdot 256 \cdot 336}{9}}$$

$$= \frac{-224 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 192 \cdot 192 + 256 \cdot 224 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 3}{320 \cdot 256 \cdot 336}$$

$$= \frac{-224 \cdot 7 \cdot 32 \cdot 192 \cdot 192 + 256 \cdot 224 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 96}{320 \cdot 256 \cdot 336}$$

$$= \frac{-2 \cdot 7 \cdot 192 \cdot 192 + 256 \cdot 2 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 3}{10 \cdot 256 \cdot 3}$$

$$= \frac{-2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 24 + 2 \cdot 480 \cdot 7 \cdot 3}{10 \cdot 3}$$

$$= \frac{-2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 24 + 2 \cdot 480 \cdot 7}{10}$$

$$= \frac{-672 + 6720}{10} = \frac{6048}{10}$$

$$= 604\tfrac{4}{5} \text{ thlr.}$$

Nach den ersten Werthen für x und y sind zuerst 320 Ellen verkauft worden, also wurden 800 Ellen eingekauft zu $\frac{320}{\frac{320}{3}} = 3$ thlr., folglich die Ausgabe = 2400 thlr. Die

320 Ellen wurden zu $\frac{320}{\frac{256}{3}} = \frac{320 \cdot 3}{256} = \frac{5 \cdot 3}{4} = 3\frac{3}{4}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = 1200 thlr. Die übrigen 480 Ellen kosteten $\frac{933\frac{1}{3}}{224} = \frac{2800}{672} = 4\frac{1}{6}$ thlr., also die Einnahme 2000 thlr., folglich die ganze Einnahme = 3200 thlr., daher der Gewinn 800 thlr., welcher = $\frac{933\frac{1}{3}}{\frac{7}{8}}$ ist. Wäre Alles zu $4\frac{1}{6}$ thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme $3333\frac{1}{3}$ thlr., also der Gewinn = $933\frac{1}{3}$ thlr. gewesen.

Nach den zweiten Werthen für x und y wurden zuerst 192 Ellen verkauft, also 672 Ellen eingekauft, und zwar zu $\frac{192}{\frac{320}{5}} = \frac{576}{320} = 1\frac{4}{5}$ thlr., folglich die Ausgabe = $1209\frac{3}{5}$ thlr. Die 192 Ellen wurden zu $\frac{192}{\frac{256}{3}} = \frac{576}{256} = 2\frac{1}{4}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = 432 thlr. Die übrigen 480 Ellen kosteten beim Verkaufe $\frac{604\frac{4}{7}}{224} = \frac{3024}{1120} = 2\frac{7}{10}$ thlr., also die Einnahme = 1296 thlr., folglich die ganze Einnahme = 1728 thlr. und der Gewinn = $518\frac{2}{7}$ thlr., welcher $\frac{604\frac{4}{7}}{\frac{8}{7}} = \frac{3024}{5} \cdot \frac{6}{7}$ ist. Wäre Alles zu dem letzteren Preise verkauft worden, so wäre die Einnahme = $1814\frac{4}{7}$ thlr., also der Gewinn = $604\frac{4}{7}$ thlr. gewesen.

XXXII. Das 33ste Exempel S. 435. und 436. führt auch auf eine quadratische Gleichung. Zuerst bemerken wir, daß es S. 436. in der ersten Zeile heißen muß: wie viel Zentner beträgt der erste Theil der verkauften Waare, anstatt: wie theuer verkauft er vom ersten Theile das Pfund, und daß S. 435. in der letzten Zeile $7\frac{9}{10}$ gr. statt 8 gr. stehen müssen. Die quadratische Gleichung ist

$$y^2 + ya(e-d) = a^2(e-b)^2.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist a = 500 Ztn. = 55000 Pfd., b = 6 gr. = $\frac{1}{4}$ thlr., d = $7\frac{9}{10}$ gr. = $\frac{79}{240}$ thlr., e = 9 gr. = $\frac{3}{8}$ thlr. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$y^2 + y\,55000\left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{79}{240}\right) = 55000^2\left(\tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}\right)^2,$$

oder $y^2 + y\,55000\left(\frac{90}{240} - \frac{79}{240}\right) = 55000^2\left(\frac{1}{8}\right)^2,$

oder $y^2 + y\,55000 \cdot \frac{11}{240} = 55000 \cdot 55000 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8},$

oder $y^2 + y\,\frac{137500}{6}\,11 = 6875 \cdot 6875,$

oder $y^2 + \frac{1512521}{6}\,y = 47265625.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$. Es ist also

1) $y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$

$= \frac{-\frac{15125}{6} + \sqrt{\left(\frac{15125^2}{6^2} + 4 \cdot 47265625\right)}}{2}$

$= \frac{-\frac{15125}{6} + \sqrt{\left(\frac{228765625}{36} + \frac{4 \cdot 36 \cdot 47265625}{36}\right)}}{2}$

$= \frac{-\frac{15125}{6} + \sqrt{\frac{7035015625}{36}}}{2}$

$= \frac{-\frac{15125}{6} + \frac{83875}{6}}{2}$

$= \frac{68750}{12} = 5729\frac{1}{6}$ thlr.

2) $y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$

$= \frac{-15125 - 83875}{2}$

$= \frac{-99000}{12} = -8250$ thlr.

Für diesen Fall wird also 8250 thlr. verloren.

Aus beiden Werthen für y ergibt sich auch ein doppelter Werth für x. Es ist nämlich

$$x = \frac{a(e-b) - y}{e - d}.$$

Folglich ist 1) $x = \frac{55000(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}) - 5729\frac{1}{6}}{\frac{3}{8} - \frac{79}{240}}$

$= \frac{55000 \cdot \frac{1}{8} - 5729\frac{1}{6}}{\frac{11}{240}}$

$= \frac{6875 - 5729\frac{1}{6}}{\frac{11}{240}}$

$= \frac{1145\frac{5}{6}}{\frac{11}{240}} = \frac{6875}{6} \cdot \frac{240}{11}$

$= 625 \cdot 40 = 25000$ Pfd.

$= 227\frac{3}{11}$ Ztn.

2) $y = \frac{55000(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}) + 8250}{\frac{3}{8} - \frac{79}{240}}$

$= \frac{6875 + 8250}{\frac{11}{240}}$

$$y = \frac{15125}{\frac{11}{240}} = 15125 \cdot \frac{240}{11}$$
$$= 1375 \cdot 240 = 330000$$
$$= 3000 \text{ Ztn.}$$

Die letztern Werthe für y und x geben keinen natürlichen Sinn, daher wir sie übergehen. Nach den erstern Werthen aber hat er 500 Ztn. zu $\frac{1}{4}$ thlr. das Pfund eingekauft, die Ausgabe ist also = 13750 thlr. Davon verkauft er $227\frac{3}{11}$ Ztn. zu $7\frac{9}{10}$ gr. das Pfund, die Einnahme ist also = $8229\frac{1}{6}$ thlr. Die übrigen $272\frac{8}{11}$ Ztn. verkauft er zu $\frac{3}{8}$ thlr. das Pfund, die Einnahme also = 11250 thlr.; folglich ist die ganze Einnahme = $19479\frac{1}{6}$ thlr., und daher der Gewinn = $5729\frac{1}{6}$ thlr. Wäre Alles zu dem letztern Preise verkauft worden, so wäre die Einnahme = 20625 thlr. und der Gewinn = 6875 thlr. gewesen, und es verhält sich

$$6875 : 5729\tfrac{1}{6} = 272\tfrac{8}{11} : 227\tfrac{3}{11}.$$

XXXIII. Das 34ste Exempel S. 437. gibt die quadratische Gleichung $cy^2 - y(cc - g) = bg$.

Daraus erhält man

$$y^2 - y\left(c - \frac{g}{c}\right) = \frac{bg}{c}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist b = $1\frac{1}{2}$ thlr. = $\frac{3}{2}$ thlr., c = 200 Ellen, e = 3 thlr., g = 800 thlr. Dies gibt die

Gleichung $y^2 - y\left(3 - \frac{800}{200}\right) = \frac{\frac{3}{2} \cdot 800}{200}$,

oder $y^2 - y \cdot -1 = 6$,

oder $y^2 + y = 6$.

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$. Also ist

1) $y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$

$= \frac{-1 + \sqrt{(1 + 4 \cdot 6)}}{2}$

$= \frac{-1 + \sqrt{25}}{6}$

$= \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ thlr.,

2) $y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$

$= \frac{-1-5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ thlr.

Da nun $x = \frac{s}{e-b} = \frac{800}{3-\frac{3}{2}} = \frac{800}{\frac{3}{2}} = \frac{1600}{3} = 533\frac{1}{3}$ Ellen iſt, ſo ergibt ſich für den erſten Werth von y folgende Auflöſung:

Es wurden $533\frac{1}{3}$ Ellen zu $1\frac{1}{2}$ thlr. gekauft, alſo die Ausgabe = 800 thlr. Davon wurden 200 Ellen zu 2 thlr. verkauft, alſo die Einnahme = 400 thlr. Die übrigen $333\frac{1}{3}$ Ellen, welche zu 3 thlr. verkauft wurden, geben eine Einnahme von 1000 thlr. Daher die ganze Einnahme = 1400 thlr. und der Gewinn = 600 thlr. Wäre Alles zu 3 thlr. verkauft worden, ſo wäre die Einnahme = 1600 thlr., alſo der Gewinn = 800 thlr. geweſen. Dieſer mögliche Gewinn verhält ſich aber zum wirklichen wie der Verkaufspreis 2 thlr. zum Einkaufspreis $1\frac{1}{2}$ thlr.

XXXIV. Bei dem 36ſten Exempel S. 442. hat ſich die quadratiſche Gleichung gefunden

$$-x^2b(e-b)+rx[e^2-2b(e-b)] = br^2(e-b),$$

oder $$x^2b(e-b)-x[re^2-2rb(e-b)] = -br^2(e-b).$$

Daraus ergibt ſich

$$x^2-x\left(\frac{re^2}{b(e-b)}-2r\right) = -r^2.$$

Nach den Zahlen des Exempels iſt b = 2 thlr., r = 600, e = 3 thlr. Alſo erhält man die Gleichung in Zahlen

$$x^2-x\left(\frac{600\cdot 9}{2(3-2)}-2\cdot 600\right) = -360000,$$

oder $$x^2-(2700-1200)x = -360000,$$

oder $$x^2-1500x = -360000.$$

Dieſe Gleichung gehört zur Form $x^2-px=-q$. Es iſt alſo

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{1500+\sqrt{(1500^2-1440000)}}{2}$$

$$= \frac{1500+\sqrt{(2250000-1440000)}}{2}$$

$$= \frac{1500+\sqrt{810000}}{2}$$

$$= \frac{1500+900}{2} = \frac{2400}{2}$$

$$= 1200 \text{ Ellen.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{1500 - 900}{2} = \frac{600}{2}$$
$$= 300 \text{ Ellen.}$$

Daraus ergibt sich nun auch ein doppelter Werth für y. Es war nämlich

$$y = \frac{(r+x)\,b}{x}.$$

Also 1) $y = \frac{(600+1200)\,2}{1200} = \frac{3600}{1200} = 3$ thlr.

2) $y = \frac{(600+300)\,2}{300} = \frac{1800}{300} = 6$ thlr.

Die erste Auflösung der Aufgabe ist also:

Es sind 1800 Ellen Tuch, die Elle zu 2 thlr. gekauft worden, die Ausgabe also = 3600 thlr. Dann sind 1200 Ellen zu 3 thlr. verkauft worden, also die Einnahme = 3600 thlr. und die übrigen 600 Ellen auch zu 3 thlr., also die Einnahme 1800 thlr., die ganze Einnahme daher 5400 thlr. und der Gewinn 1800 thlr. Der mögliche Gewinn ist in diesem Falle der nämliche, weil y und e einerlei Werth haben, und es verhält sich daher der mögliche Gewinn zum wirklichen, wie 3 zu 3, desgleichen die ganze Waare zum ersten Theile (1800 zu 1200) wie der Preis vom ersten Theile zum Einkaufspreise, wie 3 zu 2.

Nach den zweiten Werthen wurden 900 Ellen zu 2 thlr. gekauft, also die Ausgabe = 1800 thlr. Davon wurden verkauft 300 Ellen zu 6 thlr., also die Einnahme = 1800 thlr. und 600 Ellen zu 3 thlr., also die Einnahme auch = 1800 thlr., folglich die ganze Einnahme = 3600 thlr. und der Gewinn 1800 thlr. Die mögliche Einnahme wäre 5400 thlr., und also der mögliche Gewinn 3600 thlr. gewesen. Es verhält sich auch jetzt 3600 thlr. : 1800 thlr. = 3 thlr. : $1\frac{1}{2}$ thlr.
und 900 : 300 = 6 : 2.

§. 10.

Die S. 313. angegebenen Nebenfälle geben durchgängig quadratische Gleichungen. Wir wollen daher Beispiele zu denselben noch hinzufügen.

1) Es kauft jemand Kaffee, den Zentner für m mal weniger Thaler, als er Zentner kaufte; er verkauft davon einen Theil zu einem Preise, der n mal geringer ist, als die Menge der

verkauften Zentner, das Übrige den Zentner für e thlr. Er gewinnt so f thlr., hätte aber g thlr. gewonnen, wenn Alles für e verkauft worden wäre; wie viel hat er eingekauft und zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x—y	e	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

oder $$\frac{x^2}{m} - xe = -g,$$

oder $$x^2 - mxe = -mg.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{y^2}{u} + xe - ye.$$

Abzug dieser Gleichung von der ersten.

$$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{y^2}{u} + xe - ye,$$

Rest $$g - f = ye - \frac{y^2}{u},$$

oder $$u(g-f) = uey - y^2,$$

oder $$y^2 - uey = -u(g-f).$$

Es sei m = 15, u = 5, e = 42 thlr., f = 2840 thlr. und g = 3240, so heißt die erste Gleichung in Zahlen

$$x^2 - x \cdot 15 \cdot 42 = -15 \cdot 3240,$$

oder $$x^2 - x \cdot 630 = -48600.$$

Diese Gleichung gehört zur Grundform $x^2 - px = -q$.

Also

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{630 + \sqrt{(630^2 - 4 \cdot 48600)}}{2}$$

$$= \frac{630 + \sqrt{(396900 - 194400)}}{2}$$

$$x = \frac{630 + \sqrt{202500}}{2}$$

$$= \frac{630 + 450}{2} = \frac{1080}{2}$$

$$= 540 \text{ Stn.}$$

2) $$x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{630 - 450}{2}$$

$$= \frac{180}{2} = 90 \text{ Stn.}$$

Die quadratische Gleichung für y gibt folgende in Zahlen

$$y^2 - 210y = -5.400,$$

oder

$$y^2 - 210y = -2000.$$

Auch diese gehört zur Form $x^2 - px = -q$, und also ist y

1) $$= \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{210 + \sqrt{(210^2 - 4.2000)}}{2}$$

$$= \frac{210 + \sqrt{(44100 - 8000)}}{2}$$

$$= \frac{210 + \sqrt{36100}}{2}$$

$$= \frac{210 + 190}{2}$$

$$= \frac{400}{2} = 200 \text{ Stn.}$$

2) $$= \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{210 - 190}{2}$$

$$= \frac{20}{2} = 10 \text{ Stn.}$$

Aus diesen Werthen für x und y ergeben sich vier Auflösungen der Aufgabe. Es ist entweder $x = 540$ und $y = 200$, oder $x = 540$ und $y = 10$, oder $x = 90$ und $y = 200$, oder $x = 90$ und $y = 10$.

Nach der ersten Auflösung sind 540 Stn. zu $\frac{540}{15}$ oder 36 thlr. eingekauft worden, die Ausgabe ist also = 19440 thlr. Davon wurden 200 Stn. zu $\frac{200}{5}$ oder 40 thlr. verkauft, also die Einnahme = 8000 thlr. Die übrigen 340 Stn. zu 42 thlr. geben eine Einnahme von 14280 thlr.; folglich ist die ganze Einnahme = 22280 thlr., und daher der wirkliche Gewinn = 2840 thlr. Wäre Alles zu 42 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme = 22680 thlr. und also der Gewinn 3240 thlr. gewesen.

Nach der zweiten Auflösung kauft er auch 540 Stn. zu $\frac{540}{15}$ oder 36 thlr., verkauft aber 10 Stn. zu $\frac{10}{5}$ oder 2 thlr., erhält also 20 thlr. dafür. Die übrigen 530 Stn. werden zu 42 thlr. verkauft, also die Einnahme = 22260 thlr., und folglich die ganze Einnahme = 22280, und daher der Gewinn = 2840 thlr. Die mögliche Einnahme nebst dem Gewinne kommen wie vorher.

Nach der dritten Auflösung gibt es keine natürliche Darstellung der Aufgabe.

Nach der vierten aber sind 90 Stn. zu $\frac{20}{5}$ oder 6 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe = 540 thlr. Davon wurden verkauft 10 Stn. zu $\frac{10}{5}$ oder 2 thlr., folglich die Einnahme = 20. Die übrigen 80 Stn. zu 42 thlr. geben eine Einnahme von 3360 thlr., also die ganze Einnahme = 3380 thlr., und folglich der Gewinn = 2840 thlr. Die mögliche Einnahme wäre 3780 thlr., und daher der mögliche Gewinn = 3240 thlr.

2) Es kauft jemand Getreide, den Wispel zu m mal weniger Thaler, als es Wispel sind; davon verkauft er einen Theil zu d thlr., das übrige zu v mal weniger Thaler, als er zuerst Wispel verkaufte, gewinnt so f thlr., und hätte g thlr. gewonnen, wenn Alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden; wie viel hat er eingekauft und zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{xy}{v},$$

also $$vx^2 + mvg = mxy,$$

daher $$\frac{vx^2 + mvg}{mx} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = yd + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Diese Gleichung von der ersten abgezogen, kommt

$$g - f = \frac{y^2}{v} - yd.$$

Jetzt setze man anstatt y den gefundenen Werth. Dann ist

$$y^2 = \left(\frac{vx^2+mvg}{mx}\right)^2 = \frac{v^2x^4+2v^2mgx^2+m^2v^2g^2}{m^2x^2}$$

und $-yd = \pm\frac{\sqrt{dx^2+mvdg}}{mx}$.

Folglich ist

$$g-f = \frac{v^2x^4+2v^2mgx^2+m^2v^2g^2}{vm^2x^2} - \frac{vdx^2+mvdg}{mx},$$

oder $$g-f = \frac{vx^4+2vmgx^2+m^2g^2v}{m^2x^2} - \frac{vdx^2+mvdg}{mx}.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$m^2x^2(g-f) = vx^4+2vmgx^2+m^2g^2v-mvdx^2-m^2vdgx.$$

Ordnet man diese Gleichung, so erhält man

$$vx^4-mvdx^3+2vmgx^2-m^2(g-f)x^2-m^2vdgx = -m^2g^2v,$$

oder

$$x^4-mdx^3+2mgx^2-\frac{m^2(g-f)x^2}{v}-m^2dgx = -m^2g^2,$$

oder

$$x^4-mdx^3+x^2\left(2mg-\frac{m^2(g-f)}{v}\right)-m^2dgx = -m^2g^2.$$

Setzt man $m = 10$, $d = 36$, $f = 2600$, $g = 4000$, $v = 2$, so ergibt sich daraus in Zahlen die Gleichung

$$x^4-10.36x^3+x^2\left(2.10.4000-\frac{100(4000-2600)}{2}\right)$$
$$-100.36.4000x = -100.4000^2,$$

oder $$x^4-360x^3+x^2(80000-70000)-14400000x$$
$$= -1600000000,$$

oder

$$x^4-360x^3+10000x^2-14400000x = -1600000000.$$

Die weitere Auflösung dieser Gleichung von der vierten Ordnung werden wir weiter unten kennen lernen.

Es ist aber nicht nothwendig, daß man bei Auflösung dieser Aufgabe die Gleichungen vom vierten Grade zu Hülfe nimmt. Da in der Gleichung $g-f = \frac{y^2}{v}-yd$ weiter keine unbekannte Größe als y vorkommt, so läßt sich dieselbe nach der Regel für quadratische Gleichungen auflösen, und hat man nun y bestimmt, so läßt sich daraus wieder in der ersten Gleichung der Werth von x finden.

Aus der Gleichung $g-f = \frac{y^2}{v}-yd$ ergibt sich

$$v(g-f) = y^2-vdy.$$

Nun ist $v = 2$, $d = 36$, $g = 4000$, $f = 2600$, also hat man.

$$2(4000 - 2600) = y^2 - 2 \cdot 36 \cdot y,$$

oder $$2 \cdot 1400 = y^2 - 72y,$$

oder $$2800 = y^2 - 72y.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = q$. Also ist

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{72 + \sqrt{(72^2 + 4 \cdot 2800)}}{2}$$

$$= \frac{72 + \sqrt{(5184 + 11200)}}{2}$$

$$= \frac{72 + \sqrt{16384}}{2}$$

$$= \frac{72 + 128}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{72 - 128}{2} = -\frac{56}{2} = -28.$$

Der zweite Werth für y gibt keine natürliche Auflösung, daher wir uns bloß an den ersten halten, um x zu bestimmen. Es war aber $\frac{vx^2 + mvg}{mx} = y$,

also $$\frac{2x^2 + 10 \cdot 2 \cdot 4000}{10x} = 100,$$

folglich $$2x^2 + 10 \cdot 2 \cdot 4000 = 10 \cdot 100x,$$

oder $$2x^2 - 1000x = -80000,$$

oder $$x^2 - 500x = -40000.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{500 + \sqrt{(250000 - 160000)}}{2}$$

$$= \frac{500 + \sqrt{90000}}{2}$$

$$= \frac{500 + 300}{2} = \frac{800}{2} = 400 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{500 - 300}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ Wspl.}$$

Nach

Nach den ersten Werthen für x und y sind also 400 Wspl. zu $\frac{400}{100}$ oder 40 thlr. gekauft worden, folglich ist die Ausgabe = 16000 thlr. Davon wurden verkauft 100 Wspl. zu 36 thlr., also die Einnahme 3600 thlr., die übrigen 300 Wspl. aber zu $\frac{100}{2}$ oder 50 thlr., also die Einnahme = 15000 thlr., folglich die ganze Einnahme = 18600 thlr., und daher der Gewinn = 2600 thlr. Wäre aber Alles zu 50 thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme = 20000 thlr., und also der Gewinn = 4000 thlr. gewesen.

Nach dem zweiten Werthe für x sind 100 Wspl. eingekauft worden und zwar zu $\frac{100}{10}$ oder 10 thlr., also die Ausgabe = 1000 thlr. Nimmt man nun y = 100, so wurde gleich anfangs alles Getreide verkauft. War der Preis 36 thlr., so war die Einnahme 3600 thlr., der Gewinn also 2600 thlr. War aber der Preis 50 thlr., so wurden 5000 thlr. eingenommen und folglich 4000 thlr. gewonnen.

3) Es kauft jemand Tuch und bezahlt die Elle mit m mal weniger Thaler, als es Ellen sind, verkauft davon einen Theil zu d thlr., den Rest zu e thlr. und gewinnt so w mal mehr Thaler, als er Ellen zuerst verkaufte. Wie viel Ellen hat er eingekauft und zuerst verkauft, wenn man weiß, daß er g thlr. gewonnen hätte, wofern Alles die Elle zu e thlr. wäre verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	wy	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

also $$x^2 + mg = mex,$$

oder $$x^2 - mex = -mg.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = yd + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = ye - d,$$

oder $g = wy + ye - yd,$
oder $g = y(w + e - d),$
also $\frac{g}{w - e - d} = y.$

Es sei $m = 40$, $d = 2\frac{3}{4}$ thlr., $e = 3$ thlr., $w = 2\frac{5}{12}$, $g = 80$ thlr. Wir überlassen die weitere Ausrechnung der quadratischen Gleichung, so wie die Bestimmung von y, für welches die Gleichung nur einfach ist, dem Leser und bemerken nur, daß die beiden Werthe von x eine passende Auflösung des Exempels geben.

4) Es kauft jemand Zucker, den Zentner für m mal weniger Thaler, als er Zentner kaufte, verkauft davon einen Theil, den Zentner zu d thlr., das Übrige zu e thlr., gewinnt so f und hätte z mal so viel Thaler gewonnen, als er zuerst Zentner verkaufte, wenn er Alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Zentner hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x − y	e	f	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = xe,$$
also $x^2 + mzy = mex,$
folglich $x^2 - mex = -mzy,$
und daher $\frac{x^2 - mex}{mz} = -y,$
oder $-\frac{x^2 - mex}{mz} = y,$
oder $\frac{-x^2 + mex}{mz} = y.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = yd + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$zy - f = ye - yd,$
oder $-f = ye - yd - yz,$

oder $f = -ye + yd + yz,$

oder $f = y(d + z - e),$

aber $\frac{f}{d+z-e} = y.$

Beide Werthe für y gleich gesetzt, kommt

$$\frac{f}{d+z-e} = \frac{-x^2+mex}{mz}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$mzf = -(d+z-e)x^2 + me(d+z-e)x,$$

oder $(d+z-e)x^2 - me(d+z-e)x = -mzf,$

folglich $x^2 - mex = -\frac{mzf}{d+z-e}.$

Es sei $m = 10$, $d = 40$, $e = 45$, $f = 2840$, $z = 40\frac{1}{2}$. Aus diesen Werthen läßt sich die quadratische Gleichung leicht in Zahlen entwickeln. Beide Werthe für x sind passend und y wird durch eine einfache Gleichung bestimmt. Wir übergehen die weitere Ausführung.

5) Es kauft jemand Getreide, den Wispel für m mal weniger Thaler, als es Wispel sind. Davon verkauft er einen Theil, den Wispel für u mal weniger Thaler, als er Wispel verkauft, den Rest aber für v mal weniger Thaler. Er gewinnt so f und hätte g gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Wispel waren es und wie viel hat er zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	$x - y$	$\frac{y}{v}$	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{xy}{v},$$

also $vx^2 + mvg = mxy,$

oder $\frac{vx^2+mvg}{mx} = y.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - f = \frac{y^2}{v} - \frac{y^2}{u},$$

oder $$vu(g-f) = uy^2 - vy^2,$$

oder $$vu(g-f) = y^2(u-v).$$

Nun erhebe man den Werth für y zum Quadrate, um y^2 zu erhalten. Es ist also

$$y^2 = \frac{v^2x^4 + 2mv^2gx^2 + m^2v^2g^2}{m^2x^2}.$$

Folglich ist

$$vu(g-f) = \frac{v^2(u-v)x^4 + 2mv^2g(u-v)x^2 + m^2v^2g^2(u-v)}{m^2x^2}.$$

Daraus ergibt sich

$$vum^2(g-f)x^2 = v^2(u-v)x^4 + 2mv^2g(u-v)x^2 + m^2v^2g^2(u-v),$$

oder

$$v^2(u-v)x^4 + 2mv^2g(u-v)x^2 - vum^2(g-f)x^2 = -m^2v^2g^2(u-v),$$

oder $$x^4 + x^2\,\frac{2mv^2g(u-v) - vum^2(g-f)}{v^2(u-v)} = -m^2g^2,$$

oder $$x^4 + x^2\left(2mg - \frac{um^2(g-f)}{v(u-v)}\right) = -m^2g^2.$$

Es ist dies eine unvollständige biquadratische Gleichung, deren Auflösung weiter unten folgen wird.

Aber so, wie oben beim zweiten Exempel, läßt sich auch hier die Auflösung durch quadratische Gleichungen finden. Es war nämlich $y^2(u-v) = vu(g-f)$,

oder $$y^2 = \frac{vu(g-f)}{u-v},$$

folglich $$y = \sqrt{\frac{vu(g-f)}{u-v}}.$$

Es sei $m = 12$, $v = 3\frac{3}{4}$, $u = 4$, $f = 5520$ und $g = 6480$, so ist

$$y = \sqrt{\frac{\frac{15}{4}\cdot 4(6480-5520)}{4-3\frac{3}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{15\cdot 960}{\frac{1}{4}}}$$

$$= \sqrt{57600} = 240 \text{ Wspl.}$$

Diesen Werth schreibe man in die erste Gleichung für y. Es war nämlich

$$\frac{vx^2 + mvg}{mx} = y,$$

also $vx^2 + mvg = mxy,$
oder $vx^2 - mxy = -mvg,$
oder $x^2 - x\frac{my}{v} = -mg,$
also in Zahlen
$x^2 - x\frac{12.240}{3\frac{3}{4}} = -12.6480,$
oder $x^2 - x\frac{12.240.4}{15} = -77760,$
oder $x^2 - x\,12.16.4 = -77760,$
oder $x^2 - 768x = -77760.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

1) $x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$
$= \frac{768 + \sqrt{(768^2 - 4.77760)}}{2}$
$= \frac{768 + \sqrt{(589824 - 311040)}}{2}$
$= \frac{768 + \sqrt{278784}}{2}$
$= \frac{768 + 528}{2} = \frac{1296}{2}$
$= 648$ Wspl.

2) $x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$
$= \frac{768 - 528}{2}$
$= \frac{240}{2} = 120$ Wspl.

Nur der erste Werth von x gibt eine natürliche Auflösung. Es sind also 648 Wspl. zu $\frac{648}{12}$ oder 54 thlr. eingekauft worden, also die Ausgabe = 34992 thlr. Davon wurden verkauft 240 Wspl. zu $\frac{240}{4}$ oder 60 thlr., also die Einnahme = 14400 thlr., die übrigen 408 Wspl. aber zu $\frac{240}{3\frac{3}{4}}$ oder 64 thlr., also die Einnahme = 26112 thlr., folglich der Gewinn = 5520 thlr. Alles zu 64 thlr. verkauft, wäre die Einnahme = 41472 thlr. und der Gewinn = 6480 thlr. gewesen.

6) Es kauft jemand Papier und bezahlt den Ballen mit m mal weniger Thaler als er Ballen kauft. Davon verkauft er einen Theil, den Ballen für u mal weniger Thaler als er Ballen verkauft, das übrige den Ballen für e thlr. Er gewinnt so w mal so viel Thaler, als er Ballen zuerst verkaufte,

hätte aber g gewonnen, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ballen sind gekauft, wie viel zuerst verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x − y	e	wy	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = xe,$$

also $x^2 + mg = mex,$

folglich $x^2 - mex = -mg.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{y^2}{u} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = ye - \frac{y^2}{u},$$

also $ug - uwy = uye - y^2,$

oder $ug = uwy + uye - y^2.$

Nach den Potenzen von y geordnet, kommt

$$y^2 - uye - uwy = -ug,$$

oder $y^2 - y(ue + uw) = -ug,$

oder $y^2 - yu(e + w) = -ug.$

Es sei $m = 10$, $u = 4$, $w = 16\frac{2}{3}$, $e = 40$, $g = 3000$, so heißt die erste Gleichung in Zahlen

$$x^2 - 400x = -30000.$$

Sie gehört also zur Form $x^2 - px = -q$. Es ist daher

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{400 + \sqrt{(160000 - 120000)}}{2}$$

$$= \frac{400 + \sqrt{40000}}{2}$$

$$= \frac{400 + 200}{2} = 300 \text{ Ballen.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{400 - 200}{2} = 100 \text{ Ballen.}$$

Die zweite Gleichung heißt in Zahlen

$$y^2 - y\,4\,(40 + 56\tfrac{5}{6}) = -12000,$$

oder $$y^2 - y\,4 \cdot 56\tfrac{5}{6} = -12000,$$

oder $$y^2 - y\,\tfrac{682}{3} = -12000.$$

Sie gehört ebenfalls zur Form $x^2 - px = -q$, also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{682}{3} + \sqrt{(\frac{465124}{9} - 48000)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{682}{3} + \sqrt{(\frac{465124 - 432000}{9})}}{2}$$

$$= \frac{\frac{682}{3} + \sqrt{\frac{331124}{9}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{682 + 182}{3}}{2}$$

$$= \tfrac{864}{6} = 144 \text{ Ballen.}$$

$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{682 - 182}{6}$$

$$= \tfrac{500}{6} = 83\tfrac{1}{3} \text{ Ballen.}$$

Es gibt also vier Auflösungen der Aufgabe:

1) $x = 300$ und $y = 144$;
2) $x = 300$ und $y = 83\frac{1}{3}$;
3) $x = 100$ und $y = 83\frac{1}{3}$;
4) $x = 100$ und $y = 144$.

Die letztere ist nicht natürlich, wir behalten daher nur die drei erstern.

1) Es sind gekauft worden 300 Ballen zu $\frac{3000}{100}$ oder 30 thlr., also die Ausgabe = 9000 thlr. Davon wurden verkauft 144 Ballen zu $\frac{144}{4}$ oder 36 thlr., also die Einnahme = 5184 thlr. Die übrigen 156 Ballen wurden zu 40 thlr. angebracht, also die Einnahme = 6240 thlr., folglich die ganze Einnahme = 11424 thlr. und der Gewinn = 2424 thlr., welcher $16\frac{5}{6}$ mal größer ist als 144. Die mögliche Einnahme ist 12000 und der mögliche Gewinn 3000 thlr.

2) Es wurden gekauft 300 Ballen, also die Ausgabe wieder 9000 thlr. Davon wurden verkauft $83\frac{1}{3}$ Ballen zu $\frac{83\frac{1}{3}}{4}$

oder $20\frac{5}{6}$ thlr., also die Einnahme $= 1736\frac{1}{3}$ thlr. Die übrigen $216\frac{2}{3}$ Ballen wurden zu 40 thlr. verkauft, also die Einnahme $= 8666\frac{2}{3}$ thlr., daher die ganze Einnahme $= 10402\frac{7}{9}$ thlr. und der Gewinn $= 1402\frac{7}{9}$ thlr., welcher $16\frac{5}{6}$ mal größer ist als $83\frac{1}{3}$. Der mögliche Gewinn ist wie in Nr. 1.

3) Es wurden gekauft 100 Ballen zu $\frac{100}{10}$ oder 10 thlr., also die Ausgabe $=$ 1000 thlr. Davon wurden verkauft $83\frac{1}{3}$ Ballen zu $\frac{83\frac{1}{3}}{4}$ oder $20\frac{5}{6}$ thlr., also die Einnahme $= 1736\frac{1}{3}$ thlr. Die übrigen $16\frac{2}{3}$ thlr. wurden zu 40 thlr. verkauft, also die Einnahme $= 666\frac{2}{3}$, folglich die ganze Einnahme $= 2402\frac{7}{9}$ thlr., und daher der Gewinn $1402\frac{7}{9}$ thlr., welcher $= 16\frac{5}{6} \cdot 83\frac{1}{3}$ ist. Die mögliche Einnahme ist 4000 thlr., also der mögliche Gewinn $=$ 3000 thlr.

7) Es kauft jemand Tuch, die Elle für m mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat. Davon verkauft er einen Theil, die Elle für u mal weniger Thaler, als es Ellen sind, das Übrige zu e thlr., gewinnt so f, hätte aber z mal so viel gewonnen, als er zuerst Ellen verkaufte, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen sind gekauft, wie viel zuerst verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	$x-y$	e	f	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = xe,$$

also $$x^2 + mzy = mxe,$$

oder $$x^2 - mxe = -mzy.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{y^2}{u} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = ye - \frac{y^2}{u},$$

also $$uzy - uf = uye - y^2,$$

oder $y^2 - uye + uzy = uf,$
oder $y^2 - (e - z)uy = uf.$

Aus dieser Gleichung läßt sich y finden, und setzt man nun diesen Werth in die Gleichung für x, so läßt sich auch dies bestimmen.

Es sei also $m = 200$, $u = 60$, $e = 3$, $f = 325$, $z = \frac{8}{3}$, so erhält man die Gleichung:

$y^2 - y \cdot 60(3 - \frac{8}{3}) = 60 \cdot 325,$
oder $y^2 - y \cdot 60 \cdot \frac{1}{3} = 19500,$
oder $y^2 - 20y = 19500.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = q$; es ist also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{20 + \sqrt{(400 + 4 \cdot 19500)}}{2}$$
$$= \frac{20 + \sqrt{78400}}{2}$$
$$= \frac{20 + 280}{2} = \frac{300}{2} = 150.$$
$$2)\ y = \frac{p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{20 - 280}{2} = \frac{-260}{2} = -130.$$

Dieser zweite Werth für y ist unpassend, wir nehmen daher den ersten, um x zu bestimmen. Es ist nämlich

$$x^2 - mxe = -mzy,$$

also hat man in Zahlen:

$x^2 - 200 \cdot 3x = -200 \cdot \frac{8}{3} \cdot 150,$
oder $x^2 - 600x = -80000.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{600 + \sqrt{(360000 - 4 \cdot 80000)}}{2}$$
$$= \frac{600 + \sqrt{40000}}{2}$$
$$= \frac{600 + 200}{2} = \frac{800}{2} = 400 \text{ Ellen.}$$
$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{600 - 200}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ Ellen.}$$

Diese Werthe geben zwei Auflösungen der Aufgabe:

1) Es sind 400 Ellen zu $\frac{400}{200}$ oder 2 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe = 800 thlr. Davon wurden verkauft 150 Ellen zu $\frac{150}{60}$ oder $2\frac{1}{2}$ thlr. und die übrigen zu 3 thlr., also die Einnahme = 375 und 750 thlr., folglich die ganze Einnahme = 1125 thlr. und der Gewinn = 325 thlr. Die mögliche Einnahme ist = 1200 und der mögliche Gewinn = 400 thlr., welcher = $\frac{8}{3}$. 150 ist.

2) Es sind 200 Ellen zu $\frac{200}{200}$ oder 1 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe = 200 thlr. Davon wurden 150 Ellen zu $2\frac{1}{2}$ thlr. und 50 Ellen zu 3 thlr. verkauft. Also die Einnahme = 375 und 150 thlr., daher die ganze Einnahme = 525 thlr. und der Gewinn = 325 thlr. Die mögliche Einnahme ist 600 und der mögliche Gewinn = 400 thlr., wie oben.

3) Es kauft jemand Getreide und bezahlt für den Wispel m mal weniger Thaler, als er Wispel kaufte. Davon verkauft er einen Theil, den Wispel für d thlr., den Rest aber für e thlr. Er gewinnt so w mal mehr Thaler, als er zuerst Wispel verkaufte, und hätte z mal mehr gewonnen, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Wispel hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	e	wy	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = xe,$$

also $$x^2 + mzy = mex,$$

folglich $$x^2 - mex = -mzy,$$

daher $$-\frac{x^2 - mex}{mz} = y,$$

oder $$\frac{-x^2 + mex}{mz} = y.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = yd + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - wy = ye - yd.$$

Da sich alle Glieder durch y heben lassen, so ist die Gleichung unbestimmt, d. h. man kann für y jeden beliebigen Werth setzen, nur muß man, da nach der letzten Gleichung, wenn man mit y alle Glieder dividirt, $z - w = e - d$ sein muß, die Werthe für z, w, e, d so wählen, daß der Unterschied zwischen z und w dem Unterschiede von e und d gleich ist. Hat man nun y angenommen, so läßt sich x aus der quadratischen Gleichung $x^2 - mex = -mzy$ bestimmen.

Es sei $m = 8$, $d = 45$, $e = 50$, $w = 32$, $z = 27$, $y = 100$. Bei diesen Annahmen ist $50 - 45 = 32 - 27$. Die quadratische Gleichung ist alsdann

$$x^2 - 8 \cdot 50x = -8 \cdot 32 \cdot 100,$$

oder

$$x^2 - 400x = -25600.$$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{400 + \sqrt{(160000 - 102400)}}{2}$$

$$= \frac{400 + \sqrt{57600}}{2}$$

$$= \frac{400 + 240}{2}$$

$$= \frac{640}{2} = 320 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{400 - 240}{2}$$

$$= \frac{160}{2} = 80 \text{ Wspl.}$$

Nur der erste Werth für x gibt eine passende Auflösung, wenn $y = 100$ gesetzt wird.

Es sind also 320 Wspl. zu $\frac{220}{8}$ oder 40 thlr. eingekauft worden, also die Ausgabe = 12800 thlr. Davon verkauft er 100 Wspl. zu 45 thlr., also die Einnahme = 4500 thlr. und die übrigen 220 Wspl. zu 50 thlr., also die Einnahme = 11000 thlr., folglich die ganze Einnahme = 15500 thlr. und der Gewinn = 2700 thlr. Die mögliche Einnahme wäre 16000 thlr., also der Gewinn 3200 thlr. Der erstere Gewinn ist 27, der andere 32 mal größer als 100 Wspl.

9) Es kauft jemand Kaffee, den Zentner für m mal weniger Thaler, als es Zentner sind. Davon verkauft er einen Theil, den Zentner zu d thlr., das Übrige für v mal weniger Thaler,

als er Zentner zuerst verkaufte. Er gewinnt so f, hätte aber z mal mehr Thaler gewonnen, als er Zentner zuerst verkaufte, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden.

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	f	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = \frac{xy}{v},$$

also $$x^2 + mzy = \frac{mxy}{v},$$

und $$vx^2 + vmzy = mxy.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = yd + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = \frac{y^2}{v} - yd.$$

oder $$vzy - vf = y^2 - vyd,$$

oder $$y^2 - vyd - vzy = -vf,$$

also $$y^2 - yv(d + z) = -vf.$$

In dieser Gleichung läßt sich y berechnen, der Werth desselben in die erste Gleichung setzen und so x finden.

Es sei $m = 15$, $d = 36$, $v = 5$, $z = 22\frac{1}{2}$ und $f = 3700$. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$y^2 - y \cdot 5(36 + 22\tfrac{1}{2}) = -5 \cdot 3700,$$

oder $$y^2 - y \cdot 5 \cdot 58\tfrac{1}{2} = -18500,$$

oder $$y^2 - \tfrac{585}{2} y = -18500.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Es ist also

$$1)\ y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{585}{2} + \sqrt{[(\frac{585}{2})^2 - 4 \cdot 18500]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{585}{2} + \sqrt{(\frac{342225 - 296000}{4})}}{2}$$

$$y = \frac{\frac{585}{2} + \sqrt{\frac{462225}{4}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{585}{2} + \frac{215}{2}}{2}$$

$$= \frac{800}{4} = 200 \text{ Stn.}$$

2) $$y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{585}{2} - \frac{215}{2}}{2}$$

$$= \frac{370}{4} = 92\frac{1}{2} \text{ Stn.}$$

Setzt man nun in der Gleichung $vx^2 + vmzy = mxy$ anstatt y den ersten Werth und drückt auch die anderen Größen durch Zahlen aus, so erhält man

$$5x^2 + 5 \cdot 15 \cdot \tfrac{45}{2} \cdot 200 = 15 \cdot x \cdot 200,$$

oder $$x^2 + 15 \cdot \tfrac{45}{2} \cdot 200 = 3 \cdot x \cdot 200,$$

oder $$x^2 + 67500 = 600x,$$

also $$x^2 - 600x = -67500.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; und es ist also

1) $$x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{600 + \sqrt{(360000 - 270000)}}{2}$$

$$= \frac{600 + \sqrt{90000}}{2}$$

$$= \frac{600 + 300}{2}$$

$$= \frac{900}{2} = 450 \text{ Stn.}$$

2) $$x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{600 - 300}{2}$$

$$= \frac{300}{2} = 150 \text{ Stn.}$$

Setzt man $y = 92\frac{1}{2}$, so erhält man die Gleichung

$$5x^2 + 5 \cdot 15 \cdot \tfrac{45}{2} \cdot \tfrac{185}{2} = 15 \cdot x \cdot \tfrac{185}{2},$$

oder $$x^2 + 15 \cdot \tfrac{45}{2} \cdot \tfrac{185}{2} = 3 \cdot x \cdot \tfrac{185}{2},$$

oder $$x^2 + \tfrac{124875}{4} = \tfrac{555}{2}x,$$

also $$x^2 - \tfrac{555}{2}x = -\tfrac{124875}{4}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{555}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{555}{2}\right)^2 - \frac{124875 \cdot 4}{4}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{555}{2} + \sqrt{\left(\frac{308025 - 499500}{4}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{555}{2} + \sqrt{-\frac{191475}{4}}}{2}.$$

Da aber die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl eine unmögliche Größe ist, so sind die beiden anderen Werthe für x unmöglich. Die Aufgabe läßt also keine andere Auflösung zu, als die, welche der erste Werth von $y = 200$ und die beiden Werthe für x, nämlich $x = 450$ und $x = 150$ vorstellen. Aber der letzte Werth von x gibt auch keine natürliche Auflösung, also bleibt nur eine, nämlich $x = 450$ und $y = 200$.

Es sind also 450 Ztn. zu $\frac{450}{15}$ oder 30 thlr. gekauft worden, folglich die Ausgabe $= 13500$ thlr. Davon wurden 200 Ztn. zu 36 thlr. verkauft und 250 zu $\frac{250}{5}$ oder 40 thlr., also die erste Einnahme $= 7200$ thlr., die zweite $= 10000$ thlr. und die ganze $= 17200$ thlr., der Gewinn aber $= 3700$ thlr. Die mögliche Einnahme ist 18000 thlr. und der mögliche Gewinn 4500 thlr., und dieser $22\frac{1}{2}$ mal größer als 200.

10) Es kauft jemand Tuch, die Elle für m mal weniger Thaler, als es Ellen sind. Ein Theil wird die Elle zu d thlr. verkauft, der Rest zu v mal weniger Thaler, als Ellen zuerst verkauft wurden. Er gewinnt so w mal mehr Thaler, als die Menge der zuerst verkauften Ellen beträgt, und hätte g thlr. gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Ellen waren es, und wie viel wurden zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	$x - y$	$\frac{y}{v}$	wy	g

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{xy}{v},$$

also $vx^2 + mvg = mxy,$
folglich $vx^2 - mxy = -mvg.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = yd + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{y^2}{v} - yd,$$

also $vg - vwy = y^2 - vdy,$
oder $y^2 - vdy + vwy = vg,$
oder $y^2 - yv(d - w) = vg.$

Es sei $m = 400$, $d = 3$ thlr., $v = 75$, $w = 4$ und $g = 1500$, so erhält man in Zahlen die Gleichung:

$y^2 - y \cdot 75(3 - 4) = 75 \cdot 1500,$
oder $y^2 - y \cdot 75 \cdot -1 = 112500,$
oder $y^2 + 75y = 112500.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 + pq = q$. Es ist also

1) $$y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{-75 + \sqrt{(75^2 + 4 \cdot 112500)}}{2}$$
$$= \frac{-75 + \sqrt{(5625 + 450000)}}{2}$$
$$= \frac{-75 + \sqrt{455625}}{2}$$
$$= \frac{-75 + 675}{2}$$
$$= \frac{600}{2} = 300 \text{ Ellen.}$$

2) $$y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{-75 - 675}{2} = \frac{-750}{2}$$
$$= -375 \text{ Ellen.}$$

Der zweite Werth von y gibt keine passende Auflösung, daher wir in der Gleichung für x nur den ersten behalten. Es war aber $vx^2 - mxy = -mvg,$

oder $$x^2 - \frac{mxy}{v} = -mg.$$

Oder in Zahlen

$$x^2 - \frac{400 + 300}{75} x = -400 \cdot 1500,$$
oder $x^2 - 1600x = -600000.$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{1600 + \sqrt{(1600^2 - 4 \cdot 600000)}}{2}$$

$$= \frac{1600 + \sqrt{(2560000 - 2400000)}}{2}$$

$$= \frac{1600 + \sqrt{160000}}{2}$$

$$= \frac{1600 + 400}{2} = \frac{2000}{2}$$

$$= 1000 \text{ Ellen.}$$

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$

$$= \frac{1600 - 400}{2} = \frac{1200}{2} = 600 \text{ Ellen.}$$

Das Exempel verstattet daher zwei Auflösungen:

1) Es sind 1000 Ellen zu $\frac{1000}{400}$ oder $2\frac{1}{2}$ thlr. eingekauft worden, also die Ausgabe = 2500 thlr. Davon wurden verkauft 300 Ellen zu 3 thlr. und 700 Ellen zu $\frac{300}{75}$ oder 4 thlr., also die beiden Einnahmen = 900 thlr. und 2800 thlr., folglich die ganze Einnahme = 3700 thlr., und der Gewinn = 1200 thlr. = 4 . 300. Die mögliche Einnahme ist = 4000, und also der mögliche Gewinn = 1500 thlr.

2) Es sind 600 Ellen zu $\frac{600}{400}$ oder $1\frac{1}{2}$ thlr. gekauft worden, also die Ausgabe = 900 thlr. Davon wurden verkauft 300 Ellen zu 3 thlr. und 300 Ellen zu 4 thlr., also Summe der Einnahmen = 2100 thlr. und der Gewinn = 1200 thlr., wie vorher. Die mögliche Einnahme ist 2400 thlr., also der mögliche Gewinn = 1500 thlr.

11) Es kauft jemand Getreide, den Wispel für m mal weniger Thaler, als es Wispel sind. Davon verkauft er einen Theil, den Wispel für u mal und den Rest für v mal weniger Thaler, als er Wispel verkaufte. Er gewinnt so w mal so viel Thaler, als die Zahl der zuerst verkauften Wispel beträgt, und hätte g gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden.

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	g

Erste

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + g = \frac{xy}{v},$$

also $vx^2 + mvg = mxy,$

folglich $vx^2 - mxy = -mvg.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{y^2}{v} - \frac{y^2}{u},$$

also $vug - vuwy = uy^2 - vy^2,$

oder $y^2(u - v) + vuwy = vug,$

folglich $y^2 + \frac{vuw}{u-v}y = \frac{vug}{u-v}.$

Berechnet man jetzt y, so läßt sich der Werth in die Gleichung für x setzen und dieses finden.

Es sei $m = 10$, $v = 4\frac{11}{16} = \frac{75}{16}$, $u = 5$, $w = 19\frac{1}{3} = \frac{58}{3}$, $g = 7000$. Man hat also in Zahlen die Gleichung:

$$y^2 + \frac{\frac{75}{16}\cdot 5\cdot\frac{58}{3}}{5 - 4\frac{11}{16}}y = \frac{\frac{75}{16}\cdot 5\cdot 7000}{5 - 4\frac{11}{16}},$$

oder $$y^2 + \frac{\frac{75\cdot 5\cdot 58}{16\cdot 3}}{\frac{5}{16}}y = \frac{\frac{75\cdot 5\cdot 7000}{16}}{\frac{5}{16}},$$

oder $$y^2 + \frac{75\cdot 5\cdot 58\cdot 16}{16\cdot 3\cdot 5}y = \frac{75\cdot 5\cdot 7000\cdot 16}{16\cdot 5},$$

oder $y^2 + 25\cdot 58y = 75\cdot 7000,$

also $y^2 + 1450y = 525000.$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$. Es ist also

$$1)\ y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$

$$= \frac{-1450 + \sqrt{(1450^2 + 4\cdot 525000)}}{2}$$

$$= \frac{-1450 + \sqrt{(2102500 + 2100000)}}{2}$$

$$= \frac{-1450 + \sqrt{4202500}}{2}$$

$$= \frac{-1450 + 2050}{2}$$

$$= \frac{600}{2} = 300 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ y = \frac{-p-\sqrt{(p^2+4q)}}{2}$$
$$= \frac{-1450-2050}{2} = -\frac{3509}{2}$$
$$= -1750 \text{ Wspl.}$$

Dieser Werth für y ist nicht zu brauchen, wir berechnen daher x bloß aus dem ersten. Es war aber

$$vx^2 - mxy = -mvg,$$

oder
$$x^2 - x\frac{my}{v} = -mg.$$

Dies gibt in Zahlen

$$x^2 - x\frac{10.300}{\frac{75}{16}} = -10.7000,$$

oder
$$x^2 - x\frac{10\cdot300\cdot16}{75} = -70000,$$

oder
$$x^2 - x\,10.4.16 = -70000,$$

oder
$$x^2 - 640x = -70000.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$, also ist

$$1)\ x = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$
$$= \frac{640+\sqrt{640^2-4.70000)}}{2}$$
$$= \frac{640+\sqrt{(409600-280000)}}{2}$$
$$= \frac{640+\sqrt{129600}}{2}$$
$$= \frac{640+360}{2} = \frac{1000}{2}$$
$$= 500 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ x = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$
$$= \frac{640-360}{2}$$
$$= \frac{280}{2} = 140 \text{ Wspl.}$$

Dieser zweite Werth gibt keine natürliche Auflösung, da y größer ist, es ist also bloß der erste passend.

Es sind also gekauft worden 500 Wspl. zu $\frac{500}{10}$ oder 50 thlr., daher die Ausgabe = 25000 thlr. Zuerst wurden verkauft 300 Wspl. zu $\frac{300}{5}$ oder 60 thlr. und dann 200 Wspl. zu $\frac{300}{4\frac{11}{16}}$ oder 64 thlr., also beide Einnahmen = 18000 thlr. und 12800 thlr., daher die ganze Einnahme = 30800 thlr.

und der Gewinn = 5800 thlr., welcher $19\frac{1}{3}$ mal größer ist als 300. Die mögliche Einnahme ist 32000 thlr., also der mögliche Gewinn = 7000 thlr.

12) Es kauft jemand Zucker a den Zentner für m mal weniger Thaler, als es Zentner sind. Davon verkauft er einen Theil, den Zentner für u mal und den Rest den Zentner für v mal weniger Thaler, als die Menge der zuerst verkauften Zentner. Er gewinnt so f, hätte aber z mal mehr Thaler gewonnen, als zuerst Zentner verkauft wurden, wenn Alles für den Preis des Zentners wäre verkauft worden. Wie viel Zentner sind eingekauft, wie viel zuerst verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	$\frac{y}{v}$	f	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = \frac{xy}{v},$$

also $vx^2 + vmzy = mxy,$

oder $vx^2 - mxy = -vmzy,$

oder $x^2 - x\frac{my}{v} = -mzy.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + f = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = \frac{y^2}{v} - \frac{y^2}{u},$$

oder $vuzy - vuf = uy^2 - vy^2,$

oder $uy^2 - vy^2 - vuzy = -vuf,$

oder $y^2(u - v) - yvuz = -vuf,$

oder $y^2 - y\frac{vuz}{u - v} = -\frac{vuf}{u - v}.$

Man berechne wieder y in Zahlen. Es sei m = 20, u = 10, v = 8, $z = 11\frac{1}{9} = \frac{100}{9}$, f = 760. Daraus erhält man

$$y^2 - y\frac{8 \cdot 10 \cdot \frac{100}{9}}{10 - 8} = -\frac{8 \cdot 10 \cdot 760}{10 - 8},$$

oder $y^2 - y\frac{8 \cdot 10 \cdot 100}{9 \cdot 2} = -\frac{8 \cdot 10 \cdot 760}{2}$,

oder $y^2 - \frac{4000}{9}y = -30400$.

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Also ist

1) $y = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{4000}{9} + \sqrt{[(\frac{4000}{9})^2 - 4 \cdot 30400]}}{2}$

$= \frac{\frac{4000}{9} + \sqrt{(\frac{16000000}{81} - \frac{9849600}{81})}}{2}$

$= \frac{\frac{4000}{9} + \sqrt{\frac{6150400}{81}}}{2}$

$= \frac{\frac{4000}{9} + \frac{2480}{9}}{2}$

$= \frac{6480}{18} = 360$ Ztn.

2) $y = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{\frac{4000}{9} - \frac{2480}{9}}{2}$

$= \frac{1520}{18} = 83\frac{8}{9}$ Ztn.

Diese Werthe für y dienen nun, um x zu bestimmen.

Es war $x^2 - x\frac{my}{v} = -mzy$.

Also in Zahlen, wenn man für y den ersten Werth setzt,

$x^2 - x\frac{20 \cdot 360}{8} = -20 \cdot \frac{100}{9}, 360$,

oder $x^2 - 900x = -80000$.

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$, also

1) $x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$= \frac{900 + \sqrt{(810000 - 4 \cdot 80000)}}{2}$

$= \frac{900 + \sqrt{(810000 - 320000)}}{2}$

$= \frac{900 + \sqrt{490000}}{2}$

$= \frac{900 + 700}{2} = \frac{1600}{2}$

$= 800$ Ztn.

$$2)\ x = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{900 - 700}{2}$$
$$= \frac{200}{2} = 100 \text{ Ztn.}$$

Nimmt man den zweiten Werth für y, so ergibt sich die Gleichung

$$x^2 - x\frac{20 \cdot 83\frac{8}{9}}{8} = -20 \cdot \frac{100}{9} \cdot 83\frac{8}{9},$$

oder $$x^2 - x\frac{5 \cdot \frac{755}{9}}{2} = -\frac{20 \cdot 100 \cdot 755}{81},$$

oder $$x^2 - x\frac{3775}{18} = -\frac{1510000}{81}.$$

Diese Gleichung gehört auch zur Form $x^2 - px = -q$; also ist

$$1)\ x = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$$
$$= \frac{\frac{3775}{18} + \sqrt{\left[\left(\frac{3775}{18}\right)^2 - \frac{4 \cdot 1510000}{81}\right]}}{2}$$
$$= \frac{3775}{18} + \sqrt{\left(\frac{14250625 - 24160000}{324}\right)^2}$$
$$= \frac{3775}{18} + \sqrt{-\frac{9909375}{324}}.$$

Da aus einem negativen Quadrate keine Wurzel gezogen werden kann, so gibt es für x keine Werthe, wenn $y = 83\frac{8}{9}$ Ztn. gesetzt wird. Es ist also y nur = 360, und da für diesen Werth auch der zweite Werth von x, nämlich 100 Ztn. nicht paßt, so läßt die Aufgabe nur eine Auflösung zu, nämlich $x = 800$ und $y = 360$.

Es sind also 800 Ztn. zu $\frac{800}{20}$ oder 40 thlr. eingekauft und 360 Ztn. zu $\frac{360}{10}$ oder 36 thlr. und die übrigen zu $\frac{360}{8}$ oder 45 thlr. verkauft worden. Die Ausgabe ist also = 32000 thlr., die beiden Einnahmen sind = 12960 thlr. und 19800 thlr., also die ganze Einnahme = 32760 thlr., folglich der Gewinn = 760 thlr. Die mögliche Einnahme ist 36000 thlr., also der Gewinn = 4000 = $11\frac{1}{9}$ mal größer als 360 thlr.

13) Es kauft jemand Papier, den Ballen für m mal weniger Thaler, als es Ballen waren. Davon verkauft er einen Theil zu u mal weniger Thaler, als es Ballen sind, das Übrige aber zu e thlr., gewinnt so w mal so viel Thaler, als er Ballen zuerst verkaufte, und hätte z mal so viel gewonnen, wenn Alles zum letzten Preise wäre verkauft worden. Wie viel Ballen sind gekauft, wie viel zuerst verkauft worden?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	x — y	e	wy	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = xe,$$

oder $x^2 + mzy = mxe,$

also $x^2 + mxe = -mzy.$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{y^2}{u} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - wy = ye - \frac{y^2}{u}.$$

Da sich alle Glieder durch y dividiren lassen, so kommt folgende einfache Gleichung

$$z - w = e - \frac{y}{u},$$

also $u(z - w) = ue - y,$

oder $y - ue = -u(z - w),$

also $y = ue - u(z - w),$

$= u(e - z + w).$

Es sei $m = 16$, $u = 5$, $e = 32$ thlr., $w = 16\frac{2}{3}$ und $z = 18\frac{2}{3}$. Daraus läßt sich y berechnen und dann dieser Werth in die obige quadratische Gleichung setzen und so x bestimmen. Wir wollen es dem Leser überlassen.

14) Es kauft jemand Getreide, den Wispel für m mal weniger Thaler, als es Wispel sind. Davon verkauft er einen Theil, den Wispel für d thlr., das Übrige für v mal weniger Thaler, als er zuerst Wispel verkaufte, gewinnt so w mal mehr, und hätte z mal mehr gewonnen, als die Zahl der zuerst verkauften Wispel beträgt, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Getreide hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	d	x — y	$\frac{y}{v}$	wy	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = \frac{xy}{v},$$

also $$vx^2 + vmzy = mxy,$$

oder $$vx^2 - mxy = -vmzy.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = yd + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - wy = \frac{y^2}{v} - yd.$$

Alles durch y dividirt, gibt

$$z - w = \frac{y}{v} - d,$$

also $$v(z - w + d) = y.$$

Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung für x, so läßt sich dieses bestimmen. Wir wollen dies dem Leser überlassen und nur Werthe für die bekannten Größen angeben. Es sei nämlich $m = 11$, $d = 40$, $v = 3\frac{3}{5}$, $w = 3\frac{1}{9}$ und $z = 8\frac{5}{9}$.

15) Es kauft jemand Zucker, den Zentner für m mal weniger Thaler, als es Zentner sind, verkauft davon einen Theil für u mal und den Rest für v mal weniger Thaler, als die Zahl der zuerst verkauften Zentner beträgt, gewinnt w mal so viel als diese Zahl, und hätte z mal so viel gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Zentner hat er gekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{x}{m}$	y	$\frac{y}{u}$	$x - y$	$\frac{y}{v}$	wy	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + zy = \frac{xy}{v},$$

also $$vx^2 + vmzy = mxy,$$

oder $$vx^2 - mxy = -vmzy.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{x^2}{m} + wy = \frac{y^2}{u} + \frac{xy}{v} - \frac{y^2}{v}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - wy = \frac{y^2}{v} - \frac{y^2}{u}.$$

Alles durch y dividirt, kommt

$$z - w = \frac{y}{v} - \frac{y}{u},$$

also $vu(z-w) = uy - vy,$

oder $vu(z-w) = y(u-v),$

folglich $\frac{vu(z-w)}{u-v} = y.$

Kennt man y, so läßt sich wieder x leicht bestimmen. Wir geben daher wiederum nur die nöthigen Data in Zahlen. Es sei nämlich $m = 20$, $u = 10$, $v = 8\frac{1}{3}$, $w = 8\frac{14}{25}$ und $z = 14\frac{14}{25}$.

§. 11.

Aus der Tabelle zu Th. I. §. 257. wollen wir noch einige Beispiele ausheben und dazu Nebenfälle bestimmen.

I. Nr. 6.

$$x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, f \,.\, g.$$

In den Nebenfällen wird d, e, f, g durch y bestimmt. Es sind folgende:

1) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, uy \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, f \,.\, g.$

2) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, vy \,.\, f \,.\, g.$

3) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, wy \,.\, g.$

4) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, f \,.\, zy.$

5) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, uy \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, vy \,.\, f \,.\, g.$

6) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, uy \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, wy \,.\, g.$

7) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, uy \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, f \,.\, zy.$

8) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, vy \,.\, wy \,.\, g.$

9) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, vy \,.\, f \,.\, zy.$

10) $x \,.\, y \,.\, \frac{x}{p} \,.\, d \,.\, x - \frac{x}{p} \,.\, e \,.\, wy \,.\, zy.$

11) $x \cdot y \cdot \frac{x}{p} \cdot uy \cdot x - \frac{x}{p} \cdot vy \cdot wy \cdot g.$

12) $x \cdot y \cdot \frac{x}{p} \cdot uy \cdot x - \frac{x}{p} \cdot vy \cdot f \cdot zy.$

13) $x \cdot y \cdot \frac{x}{p} \cdot uy \cdot x - \frac{x}{p} \cdot e \cdot wy \cdot zy.$

14) $x \cdot y \cdot \frac{x}{p} \cdot d \cdot x - \frac{x}{p} \cdot vy \cdot wy \cdot zy.$

15) $x \cdot y \cdot \frac{x}{p} \cdot uy \cdot x - \frac{x}{p} \cdot vy \cdot wy \cdot zy.$

Von diesen Fällen wollen wir zu folgenden Beispiele geben:

1) Zu Nr. 3.

Es kauft jemand Zucker zu einem gewissen Preise und verkauft davon den pten Theil, den Zentner für d thlr., das Übrige für e thlr., gewinnt so w mal so viel, als der Einkaufspreis beträgt, und hätte g gewonnen, wenn er Alles zum Preise des Restes verkauft hätte. Wie viel Zentner hat er gekauft und wie theuer den Zentner bezahlt?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	e	wy	g

Erste Gleichung.

$$xy + g = xe,$$

also $$g = xe - xy,$$

oder $$g = x(e - y),$$

folglich $$\frac{g}{e-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + wy = \frac{xd}{p} + xe - \frac{xe}{p}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{xe}{p} - \frac{xd}{p},$$

also $$pg - pwy = x(e - d),$$

folglich $$\frac{pg - pwy}{e-d} = x.$$

Beide Werthe für x gleich geſetzt, kommt

$$\frac{g}{e-y} = \frac{pg-pwy}{e-d},$$

oder $g(e-d) = pge - pgy - pwey + pwy^2,$

oder $pwy^2 - pwey - pgy = g(e-d) - pge,$

oder $pwy^2 - py(we+g) = g(e-d-pe),$

oder $y^2 - y\frac{we+g}{w} = \frac{g[e(1-p)-d]}{pw}.$

Es ſei $d = 24$, $e = 30$, $p = \frac{5}{6}$, $w = 114$, $g = 3000$, ſo erhält man in Zahlen die Gleichung:

$$y^2 - y\frac{114 \cdot 30 + 3000}{114} = \frac{3000[30(1-\frac{5}{6}) - 24]}{\frac{5}{6} \cdot 114},$$

oder $y^2 - y\frac{3420+3000}{114} = \frac{3000(30 \cdot -\frac{5}{6} - 24)}{5 \cdot 57},$

oder $y^2 - y\frac{6420}{114} = \frac{3000 \cdot -45 - 24}{5 \cdot 57},$

oder $y^2 - y\frac{1070}{19} = \frac{3000 \cdot -69}{5 \cdot 57},$

oder $y^2 - y\frac{1070}{19} = \frac{600 \cdot -23}{19},$

oder $y^2 - y\frac{1070}{19} = -\frac{13800}{19}.$

Dieſe Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; alſo iſt

1) $$y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} + \sqrt{\left[\left(\frac{1070}{19}\right)^2 - \frac{4 \cdot 13800}{19}\right]}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} + \sqrt{\left(\frac{1144900}{361} - \frac{4 \cdot 19 \cdot 13800}{361}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} + \sqrt{\left(\frac{1144900 - 1048800}{361}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} + \sqrt{\frac{96100}{361}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} + \frac{310}{19}}{2}$$

$$= \frac{1380}{38} = 36\frac{6}{19} \text{ thlr.}$$

2) $$y = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1070}{19} - \frac{310}{19}}{2}$$

$$= \frac{760}{38} = 20 \text{ thlr.}$$

Aus diesen beiden Werthen lassen sich nun auch zwei Werthe für x bestimmen. Es war nämlich

$$x = \frac{g}{e-y}.$$

Ist also $y = 36\frac{6}{19}$, so ist

$$x = \frac{3000}{30-36\frac{6}{19}} = \frac{3000}{-6\frac{6}{19}} = -475 \text{ Ztn.}$$

Dieser Werth gibt keinen natürlichen Sinn. Setzt man aber $y = 20$, so ist

$$x = \frac{3000}{30-20} = 300 \text{ Ztn.}$$

Er hat also 300 Ztn. zu 20 thlr. eingekauft, daher die Ausgabe = 6000 thlr. Davon hat er $\frac{300}{\frac{5}{2}} = 120$ Ztn. zu 24 thlr. und den Rest 180 Ztn. zu 30 thlr. verkauft, also die Einnahmen = 2880 thlr. + 5400 thlr. = 8280, und daher der Gewinn = 2280 thlr., welcher 114 mal größer ist, als der Einkaufspreis. Die mögliche Einnahme ist = 9000 thlr., also der mögliche Gewinn = 3000 thlr.

Den Werth — 475 Ztn. könnte man übrigens so verstehen: Wenn es heißt, es kauft jemand — 475 Ztn., so thut er das Gegentheil, d. h. er verkauft dieselben, und da auch

$$\frac{x}{q} = -\frac{475}{\frac{5}{2}} = -190,$$

so wie der Rest — 285 Ztn. negativ sind, so heißt diese negative Waare verkaufen, so viel als, dieselbe kaufen. Der Sinn der Auflösung ist also. Es werden 190 Ztn. zu 24 thlr. und 285 Ztn. zu 30 thlr. gekauft, Alles aber zu $36\frac{6}{19}$ thlr. wieder verkauft. Dabei wird denn ein Gewinn von 4140 thlr. gemacht, welcher 114 mal größer als y oder $36\frac{6}{19}$ ist. Hätte er aber die ganze Waare zu 30 thlr. eingekauft, so wäre der mögliche Gewinn nur 3000 thlr. gewesen.

2) Zu Nr. 4.

Es kauft jemand Getreide zu einem gewissen Preise, verkauft davon den pten Theil zu d thlr. und den Rest zu e thlr., gewinnt so f, hätte aber z mal mehr gewonnen, als der Einkaufspreis beträgt, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Getreide und zu welchem Preise hat er es gekauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x-\frac{x}{p}$	e	f	zy

Erste Gleichung.

$$xy+zy=xe,$$

also $$zy=xe-xy,$$

oder $$zy=x(e-y),$$

folglich $$\frac{zy}{e-y}=x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy+f=\frac{xd}{p}+xe-\frac{xe}{p}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy-f=\frac{xe}{p}-\frac{xd}{p},$$

also $$pzy-pf=x(e-d).$$

Setzt man nun statt x den obigen Werth, so kommt

$$pzy-pf=\frac{zy(e-d)}{e-y},$$

also $$pzey-pzy^2-pfe+pfy=zy(e-d),$$

oder $$pzy^2-pzey-pfy+zy(e-d)=-pfe,$$

folglich $$pzy^2-y[pze+pf-z(e-d)=-pfe,$$

oder $$y^2-y\frac{p(ze+f)-z(e-d)}{pz}=\frac{-pfe}{pz},$$

oder $$y^2-y\frac{p(ze+f)-z(e-d)}{pz}=\frac{-fe}{z}.$$

Es sei $p=\frac{8}{3}$, $d=50$ thlr., $e=72$ thlr., $z=480$, $f=15000$ thlr., so ergibt sich die Gleichung in Zahlen:

$$y^2-y\frac{\frac{8}{3}(480\cdot72+15000)-480(72-50)}{\frac{8}{3}\cdot480}=-\frac{15000\cdot72}{480},$$

oder $$y^2-y\frac{\frac{8}{3}\cdot40560-10560}{\frac{8}{3}\cdot480}=-\frac{1080000}{480},$$

oder $$y^2-y\frac{132160-10560}{1280}=-2250.$$

oder $$y^2-95y=-2250.$$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2-px=-q$. Also ist

$$1)\ y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$
$$= \frac{95+\sqrt{(95^2-4.2250)}}{2}$$
$$= \frac{95+\sqrt{(9025-9000)}}{2}$$
$$= \frac{95+\sqrt{25}}{2}$$
$$= \frac{95+5}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ thlr.}$$
$$2)\ y = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$
$$= \frac{95-5}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ thlr.}$$

Da $x = \frac{2y}{e-y}$ ist, so gibt der erste Werth von y die Waare $x = \frac{480.50}{72-50} = \frac{24000}{22} = 1090\frac{10}{11}$ Wspl.

Aus dem zweiten Werthe von y aber erhält man $x = \frac{480.45}{72-45} = \frac{480.45}{27} = 160.5 = 800$ Wspl.

Hieraus entstehen folgende Auflösungen:

1) Es sind gekauft worden $1090\frac{10}{11}$ Wspl. zu 50 thlr., also die Ausgabe $= 54545\frac{5}{11}$ thlr. Davon sind verkauft worden $\frac{1090\frac{10}{11}}{\frac{3}{4}}$ oder $409\frac{1}{11}$ Wspl. auch zu 50 thlr. und $681\frac{9}{11}$ Wspl. zu 72 thlr., daher die Summe der Einnahme $= 20454\frac{6}{11} + 49090\frac{10}{11} = 69545\frac{5}{11}$ thlr., also der Gewinn $= 15000$ thlr. Die mögliche Einnahme ist $78545\frac{5}{11}$ thlr., folglich der Gewinn $= 24000$ thlr., und dieser ist $= 480.50$.

2) Es sind 800 Wspl. zu 45 thlr. gekauft worden, also die Ausgabe $= 36000$ thlr. Davon sind verkauft worden $\frac{800}{\frac{8}{3}} = 300$ Wspl. zu 50 thlr. und 500 Wspl. zu 72 thlr., also die Summe der Einnahmen $= 15000$ thlr. $+ 36000$ thlr. $= 51000$ thlr., daher der Gewinn $= 15000$ thlr. Die mögliche Einnahme ist 57600 thlr. und der mögliche Gewinn $=$ 21600 thlr., welcher 480 mal größer ist als 45.

3) Zu Nr. 6.

Es kauft jemand Tuch, die Elle zu einem gewissen Preise. Davon verkauft er den pten Theil zu einem u mal größern Preise, als der Einkaufspreis war, das übrige zu e thlr., gewinnt so w mal mehr, als der Einkaufspreis beträgt, und

hätte g gewonnen, wenn er Alles zu dem Preise des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen hat er gekauft und wie theuer die Elle bezahlt?

Es ist dies Exempel dem in Nr. 3. sehr ähnlich; wir wollen daher dem Leser die Ausführung überlassen und nur passende Werthe für die Buchstaben angeben. Es sei nämlich $p = 3$, $u = 1\frac{1}{4}$, $e = 4$, $w = 112\frac{1}{2}$ und $g = 300$.

4) Zu Nr. 7.

Es kauft jemand Zucker zu einem gewissen Preise, verkauft davon den pten Theil u mal theurer, als er eingekauft hatte und den Rest zu e thlr., gewinnt so f und hätte z mal mehr gewonnen, als der Einkaufspreis beträgt, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen hat er gekauft und wie theuer die Elle bezahlt?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	uy	$x - \frac{x}{p}$	e	f	zy

Erste Gleichung.

$$xy + zy = xe,$$

also $$zy = x(e - y),$$

folglich $$\frac{zy}{e - y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + f = \frac{xuy}{p} + xe - \frac{xe}{p}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = \frac{xe}{p} - \frac{xuy}{p},$$

also $$pzy - pf = x(e - uy).$$

Setzt man nun statt x den obigen Werth, so kommt

$$pzy - pf = \frac{zy}{e - y}(e - uy).$$

Die Glieder auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$pzye - pzy^2 - pfe + pfy = zye - zuy^2,$$

oder $$zuy^2 - pzy^2 + pzye - zye + pfy = pfe,$$

$$y^2z(u - p) + y[z(p - 1) + pf] = pfe,$$

folglich $$y^2 + y\frac{z(p - 1) + pf}{z(u - p)} = \frac{pfe}{z(u - p)}$$

Es sei $p = \frac{3}{2}$, $u = \frac{6}{5}$, $e = 40$, $f = 3666\frac{2}{3}$ und $b = 166\frac{2}{3}$. Daraus ergibt sich in Zahlen:

$$y^2 + y\,\frac{\frac{500}{3}\cdot 40\left(\frac{3}{2}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{11000}{3}}{\frac{500}{3}\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{11000}{3}\cdot 40}{\frac{500}{3}\left(\frac{6}{5}-\frac{3}{2}\right)},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{\frac{500}{3}\cdot 40\cdot\frac{1}{2}+5500}{\frac{500}{3}\cdot-\frac{3}{10}} = \frac{5500\cdot 40}{\frac{500}{3}\cdot-\frac{3}{10}},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\,\frac{\frac{10000}{3}+\frac{16500}{3}}{-50} = \frac{220000}{-50},$$

$$\text{oder}\quad y^2 + y\cdot-\frac{200+330}{3} = -4400,$$

$$\text{oder}\quad y^2 - \tfrac{530}{3}y = -4400.$$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$; also ist

$$1)\ y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2} = \frac{\frac{530}{3}+\sqrt{\left[\left(\frac{530}{3}\right)^2-4\cdot 4400\right]}}{2} = \frac{\frac{530}{3}+\sqrt{\left(\frac{280900}{9}-\frac{158400}{9}\right)}}{2} = \frac{\frac{530}{3}+\sqrt{\frac{122500}{9}}}{2} = \frac{\frac{530}{3}+\frac{350}{3}}{2} = \frac{880}{6} = 146\tfrac{2}{3}\ \text{thlr.}$$

$$2)\ y = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2} = \frac{\frac{530}{3}-\frac{350}{3}}{2} = \frac{180}{6} = 30\ \text{thlr.}$$

Diese beiden Werthe für y geben nun auch zwei Werthe für x. Es war nämlich

$$x = \frac{zy}{e-y}.$$

Also ist $1)\ x = \frac{166\frac{2}{3}\cdot 146\frac{2}{3}}{40-146\frac{2}{3}} = \frac{\frac{500}{3}\cdot\frac{440}{3}}{40-\frac{440}{3}} = \frac{\frac{220000}{9}}{\frac{120-440}{3}} = \frac{220000}{-320\cdot 3}$

$= -229\frac{2}{3}$ Ztn.

$$2)\ x = \frac{166\frac{2}{3} \cdot 30}{40 - 30} = \frac{\frac{500}{3} \cdot 30}{10}$$
$$= \frac{5000}{10} = 500 \text{ Ztn.}$$

Nach dem ersten Werthe von x sind $-229\frac{1}{6}$ Ztn. gekauft, d. h. $229\frac{1}{6}$ Ztn. verkauft worden, und was dagegen im Exempel Verkauf heißt, muß als Einkauf betrachtet werden. Es wurden also $\frac{229\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}$ oder $152\frac{7}{5}$ Ztn. zu uy oder $\frac{6}{5} \cdot 146\frac{2}{3}$ oder 176 thlr. eingekauft, also die Ausgabe $= 26888\frac{8}{5}$ thlr.; dann wurden noch $76\frac{7}{18}$ Ztn. zu 40 thlr. gekauft, also die Ausgabe $3055\frac{5}{9}$ thlr.; Summe der Ausgaben $= 29944\frac{4}{5}$ thlr. Alle diese $229\frac{1}{6}$ Ztn. wurden zu $146\frac{2}{3}$ thlr. verkauft, also die Einnahme $= 33611\frac{1}{5}$ thlr., folglich der Gewinn $3666\frac{2}{3}$ thlr. Die mögliche Einnahme entsteht, wenn die ganze Waare zu 40 thlr. eingekauft und zu $146\frac{2}{3}$ thlr. verkauft worden wäre. Denn wäre die Ausgabe $= 9166\frac{2}{3}$ und die Einnahme $= 33611\frac{1}{5}$ thlr., also der Gewinn $= 24444\frac{4}{5}$, und dieser ist $166\frac{2}{3}$ mal größer als $146\frac{2}{3}$.

Bei dem andern Werthe von x und y geht Alles nach den Angaben des Exempels. Es sind 500 Ztn. zu 30 thlr. eingekauft worden, also die Ausgabe $= 15000$ thlr. Davon werden $\frac{500}{\frac{3}{2}} = 333\frac{1}{3}$ Ztn. zu $\frac{6}{5} \cdot 30$ oder 36 thlr. und die übrigen $166\frac{2}{3}$ Ztn. zu 40 thlr. verkauft, also die Summe der Einnahme $= 12000 + 6666\frac{2}{3} = 18666\frac{2}{3}$, folglich der Gewinn $= 3666\frac{2}{3}$. Die mögliche Einnahme ist 20000 thlr., also der mögliche Gewinn 5000 thlr., und dieser ist $166\frac{2}{3}$ mal größer als der Einkaufspreis.

5) Zu Nr. 8.

Es kauft jemand Getreide zu einem gewissen Preise, verkauft davon den pten Theil zu d thlr., das Übrige v mal theurer, als der Einkaufspreis ist. Er gewinnt so w mal so viel Thaler, als dieser Einkaufspreis beträgt, hätte aber g thlr. gewonnen, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Wispel hat er gekauft und wie theuer?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	y	$\frac{x}{p}$	d	$x - \frac{x}{p}$	vy	wy	g

Erste

Erste Gleichung.

$$xy + g = xvy,$$

also $$g = xy(v-1),$$

folglich $$\frac{g}{y(v-1)} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xy + wy = \frac{xd}{p} + xvy - \frac{xvy}{p}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{xvy}{p} - \frac{xd}{p},$$

also $$pg - pwy = xvy - xd$$
$$= x(vy - d).$$

Setzt man nun statt x den oben gefundenen Werth, so erhält man $pg - pwy = \frac{g}{y(v-1)}(vy - d)$.

Alles auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$ypg(v-1) - y^2pw(v-1) = gvy - gd,$$

oder $$y^2pw(v-1) - ypg(v-1) = -gvy + dg,$$

also $$y^2pw(v-1) + gvy - ypg(v-1) = dg,$$

oder $$y^2pw(v-1) + y[g[v - p(v-1)]] = dg,$$

folgt. $$y^2 + y\frac{g[v-p(v-1)]}{pw(v-1)} = \frac{dg}{pw(v-1)}.$$

Es sei $d = 30$, $p = 3$, $v = \frac{7}{5}$, $w = 200$, $g = 6000$, so ergibt sich die Gleichung in Zahlen:

$$y^2 + y\frac{6000[\frac{7}{5} - 3(\frac{7}{5} - 1)]}{3 \cdot 200(\frac{7}{5} - 1)} = \frac{30 \cdot 6000}{3 \cdot 200(\frac{7}{5} - 1)},$$

oder $$y^2 + y\frac{1200}{240} = \frac{180000}{2400},$$

oder $$y^2 + 5y = 750.$$

Die Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$; also ist

1) $$y = \frac{-p + \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{-5 + \sqrt{(25 + 3000)}}{2}$$
$$= \frac{-5 + \sqrt{3025}}{2}$$
$$= \frac{-5 + 55}{2} = \frac{50}{2} = 25 \text{ thlr.}$$

2) $$y = \frac{-p - \sqrt{(p^2 + 4q)}}{2}$$
$$= \frac{-5 - 55}{2} = -\frac{60}{2} = -30 \text{ thlr.}$$

Daraus ergeben sich denn auch zwei Werthe für x. Es war nämlich $x = \frac{g}{y(v-1)}$.

Also 1) $x = \frac{6000}{25(\frac{7}{5}-1)} = \frac{6000}{25.\frac{2}{5}}$

$= \frac{6000}{10} = 600$ Wspl.

2) $x = \frac{6000}{-30(\frac{7}{5}-1)} = \frac{6000}{-30.\frac{2}{5}}$

$= \frac{6000}{-12} = -500$ Wspl.

Die Werthe $y = -30$ und $x = -500$ geben eine nur wenig natürliche Auflösung, die andere aber $y = 25$ und $x = 600$ passen zur Aufgabe.

Die erstern Werthe geben etwa folgenden Sinn.

Wenn man -500 Wspl. einkauft, so verkauft man 500 Wspl, aber 500 Wspl. für -30 thlr. verkaufen, heißt wieder 500 Wspl. einkaufen. Es ist also $-30.-500$ oder 15000 thlr. die Ausgabe. Ferner $\frac{-500}{3}$ verkaufen, heißt $\frac{500}{3}$ einkaufen und zwar auch zu 30 thlr., also $30.\frac{500}{3} = 5000$ thlr. ebenfalls Ausgabe. Der Rest $= -\frac{1000}{3}$ wird verkauft für $\frac{7}{5}.-30$ oder -42 thlr., d. h. $\frac{1000}{3}$ werden zu 42 thlr. verkauft. Diese wirkliche Einnahme beträgt 14000 thlr. Es ist also $15000+5000 = 20000$ thlr. Ausgabe und 14000 thlr. Einnahme, folglich -6000 thlr. Gewinn, d. h. 6000 thlr. Verlust, und dieser ist 200 mal größer als der Einkaufspreis 30 thlr. Die mögliche Einnahme wäre 21000 thlr., also der mögliche Gewinn $= 6000$ thlr.

Alle folgende Nummern geben nur einfache, zum Theil unbestimmte Gleichungen.

§. 12.

II. Die Kombination Nr. 12. läßt folgende Unterabtheilungen zu, wenn die bekannten Größen durch y bestimmt werden:

1) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, e, f, g.$

2) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, f, g.$

3) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, e, wy, g.$

4) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, e, f, zy.$

5) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, f, g.$

6) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, e, wy, g.$

7) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, e, f, zy.$

8) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, wy, g.$

9) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, f, zy.$

10) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, e, wy, zy.$

11) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, wy, g.$

12) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, f, zy.$

13) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, e, wy, zy.$

14) $x, b, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, wy, zy.$

15) $x, \frac{y}{m}, y, \frac{x}{q}, x-y, \frac{y}{u}, wy, zy.$

Beispiele.

1) Zu Nr. 1.

Es kauft jemand Getreide und verkauft davon einen Theil. Der Einkaufspreis ist m mal weniger Thaler, als die Menge er zuerst verkauften Wispel, der Verkaufspreis derselben aber mal weniger Thaler, als die Menge der gekauften Wispel. Den Rest verkauft er zu e thlr., gewinnt so f thlr., und hätte thlr. gewonnen, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft ätte. Wie viel Wispel hat er gekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	e	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + g = xe,$$

Also $$xy + mg = mxe,$$

Daher $$mg = mxe - xy,$$

Folglich $$\frac{mg}{me-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + f = \frac{xv}{q} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - f = ye - \frac{xy}{q},$$

also $q(g-f) = qye - xy,$

oder $q(g-f) - qye = -xy.$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$q(g-f) - qye = -\frac{mgy}{me-y},$$

folglich $meq(g-f) - yq(g-f) - qme^2y + qey^2 = -mgy$

oder $qey^2 - qme^2y - q(g-f)y + mgy = -meq(g-f)$

oder $qey^2 - y[qme^2 + q(g-f) - mg] = -meq(g-f)$

folglich $y^2 - y\frac{q(me^2+g-f)-mg}{qe} = -\frac{meq(g-f)}{qe}$

oder $y^2 - y\frac{q(me^2+g-f)-mg}{qe} = -m(g-f).$

Es sei $m = 5$, $q = 20$, $e = 40$ thlr., $f = 1600$ thlr. $g = 4000$ thlr. Daraus ergibt sich in Zahlen die Gleichung

$$y^2 - y\frac{20(5.40^2+4000-1600)-5.4000}{20.40} = -5(4000-1600)$$

oder $y^2 - y\frac{20(5.1600+2400)-20000}{800} = -5.2400,$

oder $y^2 - y\frac{20.12400-20000}{800} = -12000,$

oder $y^2 - y\frac{148000}{800} = -12000,$

oder $y^2 - 235y = -12000.$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 - px = -q$. Es ist also

$$1)\ y = \frac{p+\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{235+\sqrt{(55225-48000)}}{2}$$

$$= \frac{235+\sqrt{7225}}{2}$$

$$= \frac{235+85}{2}$$

$$= \frac{320}{2} = 160 \text{ Wspl.}$$

$$2)\ y_1 = \frac{p-\sqrt{(p^2-4q)}}{2}$$

$$= \frac{235-85}{2}$$

$$= \frac{150}{2} = 75 \text{ Wspl.}$$

Aus diesen beiden Werthen ergeben sich auch zwei Werthe für x. Es war nämlich

$$x = \frac{mg}{e-y}.$$

Also ist 1) $x = \frac{5 \cdot 4000}{5 \cdot 40 - 160} = \frac{20000}{200-160} = \frac{20000}{40}$
$= 500$ Wspl.

2) $x = \frac{5 \cdot 4000}{5 \cdot 40 - 75} = \frac{20000}{200-75} = \frac{20000}{125}$
$= 160$ Wspl.

Es sind also entweder 500 Wspl. zu $\frac{125}{5}$ oder 32 thlr. eingekauft und zuerst 160 Wspl. zu $\frac{500}{20}$ oder 25 thlr. verkauft worden, oder die ganze Waare betrügt 160 Wspl. und der zuerst verkaufte Theil 75 Wspl. Der Einkaufspreis war alsdann $\frac{75}{5}$ oder 15 thlr. und der Verkaufspreis des ersten Theils $\frac{160}{20} = 8$ thlr.

2) Zu Nr. 2.

Es kauft jemand Kaffee, den Zentner zu b thlr., verkauft davon einen Theil für q mal weniger, als er Zentner kaufte, den Rest aber für u mal weniger, als er Zentner zuerst verkaufte, gewinnt so f, und hätte g gewonnen, wenn Alles zu dem letztern Preise wäre verkauft worden. Wie viel Zentner hat er eingekauft, wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	$\frac{y}{u}$	f	g

Erste Gleichung.

$$xb + g = \frac{xy}{u},$$

also $uxb + ug = xy,$

folglich $ug = x(y - ub)$

und $\frac{ug}{y-ub} = x.$

Zweite Gleichung.

$$xb + f = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - f = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

daher $uq(g-f) = qy^2 - uxy.$

Schreibt man statt x den Werth aus der ersten Gleichung, so erhält man $uq(g-f) = qy^2 - \frac{u^2gy}{y-ub}$.

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$yuq(g-f) - u^2bq(g-f) = qy^3 - quby^2 - u^2gy.$$

Alle Glieder mit y auf Eine Seite gebracht und nach den Potenzen von y geordnet, gibt

$$qy^3 - quby^2 - u^2gy - uq(g-f)y = -u^2bq(g-f),$$

oder $y^3 - uby^2 - \frac{u^2gy}{q} - u(g-f)y = -u^2b(g-f)$,

oder $y^3 - uby^2 - y\left(\frac{u^2g}{q} + u(g-f)\right) = -u^2b(g-f)$.

Es sei $u = 10$, $b = 2$, $g = 75$, $f = 50$, $g = 100$, so ergibt sich die Gleichung in Zahlen:

$$y^3 - 10.2.y^2 - y\left(\frac{10^2.100}{75} + 10(100-50)\right) = -10^2.2(100-50),$$

oder $y^3 - 20y^2 - y(\frac{10000}{75} + 500) = -200.50$,

oder $y^3 - 20y^2 - 633\frac{1}{3}y = -10000$.

Die Auflösung dieser kubischen Gleichung sehe man weiter unten.

3) Zu Nr. 4.

Es kauft jemand Tuch, die Elle zu b thlr., verkauft davon einen Theil, die Elle für q mal weniger Thaler, als er Ellen kaufte, den Rest zu e thlr., gewinnt so f, und hätte z mal mehr Thaler gewonnen, als er zuerst Ellen verkaufte, wenn er für Alles den Preis des Restes bekommen hätte. Wie viel Ellen hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	e	f	zy

Erste Gleichung.

$$xb + zy = xe,$$

also $$zy = x(e-b),$$

und $$\frac{zy}{e-b} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + f = \frac{xy}{q} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = ye - \frac{xy}{q}.$$

Setzt man nun statt x den Werth, so bekommt man

$$zy - f = ye - \frac{zy^2}{q(e-b)}.$$

Wir überlassen die weitere Ausführung dem Leser und bestimmen nur die bekannten Größen durch Zahlen. Es sei $b = 2$, $e = 3$, $q = 375$, $z = \frac{10}{3}$.

4) Zu Nr. 5.

Es kauft jemand Getreide, und verkauft davon einen Theil, den Wispel für q mal weniger Thaler, als er Wispel kaufte. Der Einkaufspreis beträgt aber m mal weniger Thaler, als er zuerst Wispel verkaufte und der Verkaufspreis des Restes u mal weniger Thaler. Er gewinnt so f, und hätte g gewonnen, wenn er Alles für den letztern Preis verkauft hätte. Wie viel Wispel hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x − y	$\frac{y}{u}$	f	g

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + g = \frac{xy}{u},$$

also $$uxy + umg = mxy,$$

folglich $$umg = mxy - uxy,$$

oder $$umg = xy(m-u),$$

daher $$\frac{umg}{y(m-u)} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + f = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - f = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

also $$uq(g-f) = qy^2 - uxy.$$

Setzt man nun statt x den Werth, so kommt

$$uq(g-f) = qy^2 - \frac{u^2mgy}{y(m-u)}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$yuq(g-f)(m-u) = y^3q(m-u) - u^2mgy.$$

Alles durch y dividirt, gibt die quadratische Gleichung

$$y^2q(m-n) - u^2mg = uq(g-f)(m-u),$$

also $y^2q(m-u) = u^2mg + uq(g-f)(m-u)$,

oder $y^2 = \frac{u[umg+q(g-f)(m-u)]}{q(m-u)}$,

daher $y = \mp\sqrt{\left(\frac{u[umg+q(g-f)(m-u)]}{q(m-u)}\right)}$.

Es ist dies eine reine quadratische Gleichung, zu der wir nur die bekannten Größen durch Zahlen bestimmen wollen. Es sei daher $m = 10$, $q = 20$, $u = 8$, $f = 19000$, $g = 13000$.

5) Zu Nr. 6.

Es kauft jemand Tuch und verkauft einen Theil für q mal weniger Thaler, als er Ellen kaufte, den Rest aber zu e thlr. Der Einkaufspreis betrug m mal weniger Thaler, als die Menge der zuerst verkauften Ellen und der Gewinn ist w mal größer als diese. Er hätte g gewonnen, wenn er Alles zu dem Preise des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen hat er gekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x − y	e	wy	g

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + g = xe,$$

also $xy + mg = mxe$,

oder $mg = mxe - xy$,

daher $\frac{mg}{me-y} = x$.

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + wy = \frac{xy}{q} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = ye - \frac{xy}{q},$$

oder $qg - qwy = qye - xy$.

Den Werth für x gesetzt, kommt

$$qg - qwy = qye - \frac{mgy}{me-y}.$$

Alle Glieder auf einerlei Nenner gebracht, geben

$$meqg - qgy - meqwy + qwy^2 = me^2qy - qey^2 - mgy,$$

Diese Gleichung geordnet, kommt

$$qwy^2 + qey^2 - me^2qy - meqwy - qgy + mgy = -meqg,$$

oder $y^2q(w+e) - y(me^2q + meqw + qg - mg) = -meqg,$

oder $y^2q(w+e) - y[q(me^2 + mew + g) - mg] = -meqg,$

oder $y^2 - y\frac{q[me(e+w)+g]-mg}{q(e+w)} = -\frac{meg}{q(e+w)}.$

Ist z. B. $m = 266\frac{2}{3}$, $q = 300$, $e = 5$, $g = 2400$, $w = 2$, so läßt sich die Aufgabe auflösen. Für y kommen die Werthe 800 und $571\frac{3}{7}$, wodurch sich x findet.

6) Zu Nr. 7.

Es kauft jemand Zucker und verkauft davon einen Theil, den Zentner für q mal weniger Thaler, als er Zentner kaufte, den Rest aber zu e thlr. Der Einkaufspreis war m mal weniger Thaler, als er zuerst Zentner verkaufte. Er gewinnt so f, hätte aber z mal so viel Thaler gewonnen, als die Menge der zuerst verkauften Zentner beträgt, wenn er für Alles den Preis des Restes bekommen hätte. Wie viel hat er eingekauft, wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x − y	e	f	zy / x

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + zy = xe,$$

also

$$\frac{mzy}{me-y} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + f = \frac{xy}{q} + xe - ye.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = ye - \frac{xy}{q},$$

oder

$$qzy - qf = qey - xy.$$

Für x den Werth gesetzt, kommt

$$qzy - qf - qey = -\frac{mzy^2}{me-y}.$$

Dies unter einerlei Nenner gebracht, gibt

$$meqzy - qzy^2 - meqf + qfy - me^2qy + qey^2 = -mzy^2.$$

Die Gleichung geordnet, kommt

$$qey^2 + mzy^2 - qzy^2 + meqzy - me^2qy + qfy = meqf,$$
$$\text{oder } y^2(qe + mz - qz) + y(meqz - me^2q + qf) = meqf,$$
$$\text{oder } y^2[qe + z(m-q)] + y[me(z-e) + f]] = meqf,$$
$$\text{oder } y^2 + y\frac{q[me(z-e)+f]}{qe+z(m-q)} = \frac{meqf}{qe+z(m-q)}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $m = 10$, $q = 25$, $e = 36$, $f = 7800$, $z = 35\frac{1}{5}$, so läßt sich dieselbe auflösen und y finden, woraus wieder x bekannt wird.

7) Zu Nr. 8.

Es kauft jemand Getreide, den Wispel zu b thlr. Davon verkauft er einen Theil, den Wispel für q mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat; das Übrige aber den Wispel für u mal weniger Thaler, als er zuerst Wispel verkaufte, gewinnt so w mal mehr Thaler, als die Menge der zuerst verkauften Wispel, und hätte g thlr. gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Getreide hat er eingekauft, wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	$\frac{y}{u}$	wy	g

Erste Gleichung.

$$xb + g = \frac{xy}{u},$$

also $$ubx + ug = xy,$$

folglich $$ug = xy - ubx$$

und $$\frac{ug}{y-ub} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + wy = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

also $$uqg - uqwy = qy^2 - uxy.$$

Für x den Werth gesetzt, kommt

$$uqg - uqwy = qy^2 - \frac{u^2gy}{y - ub}.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$uqgy - u^2bqg - uqwy^2 + u^2bqwy = qy^3 - quby^2 - u^2gy.$$

Nach den Potenzen von y geordnet, kommt

$$-qy^3 + quby^2 - uqwy^2 + u^2bqwy + u^2gy + uqgy = u^2bqg,$$

oder $$-qy^3 + y^2ug(b - w) + yu(ubqw + ug + qg) = u^2bqg,$$

oder $$-y^3 + y^2u(b - w) + yu\left(ubw + g + \frac{ug}{q}\right) = u^2bg.$$

Setzt man $b = 20$, $q = 20$, $u = 5$, $w = 50$, $g = 12000$, so erhält man in Zahlen die Gleichung

$$-y^3 - 150y^2 + 100000y = 6000000.$$

Die weitere Auflösung dieser kubischen Gleichung werden wir unten kennen lernen.

8) Zu Nr. 9.

Es kauft jemand Kaffee, den Zentner zu b thlr., verkauft davon einen Theil, den Zentner für q mal weniger Thaler, als er Zentner einkaufte, den Rest für u mal weniger Thaler, als er zuerst Zentner verkaufte, gewinnt so f thlr., und hätte z mal so viel Thaler gewonnen, als die Anzahl der zuerst verkauften Zentner beträgt, wenn er Alles für den Preis des Restes hätte verkaufen können. Wie viel Zentner hat er eingekauft, wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x - y$	$\frac{y}{u}$	f	zy

Erste Gleichung.

$$xb + zy = \frac{xy}{u},$$

also $$ubx + uzy = xy,$$

folglich $$uzy = xy - ubx,$$

daher $$\frac{uzy}{y - ub} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$xb+f=\frac{xy}{q}+\frac{xy}{u}-\frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy-f=\frac{y^2}{u}-\frac{xy}{q},$$

also $$uqzy-uqf=qy^2-uxy.$$

Setzt man nun statt x den obigen Werth, so kommt

$$uqzy-uqf=qy^2-\frac{u^2zy^2}{y-ub}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$uqzy^2-u^2bqzy-uqfy+u^2bqf=qy^3-quby^2-u^2zy^2.$$

Man ordne diese Gleichung nach den Potenzen von y, so kommt

$$-qy^3+quby^2+u^2zy^2+uqzy^2-u^2bqzy-uqfy=-u^2bqf,$$

oder $$-qy^3+y^2u(qb+qz+uz)-yuq(ubz+f)=-u^2bqf,$$

oder $$-y^3+y^2u\left(b+z+\frac{uz}{q}\right)-yu(ubz+f)=-u^2bf.$$

Setzt man $b=28$, $q=20$, $u=5$, $z=\frac{20}{3}$, $f=250$, so ergibt sich in Zahlen die kubische Gleichung

$$-y^3+\frac{545}{3}y^2-\frac{17750}{3}y=-175000,$$

deren weitere Auflösung unten folgen wird.

9) Zu Nr. 11.

Es kauft jemand Tuch und verkauft davon einen Theil, die Elle für q mal weniger Thaler, als er Ellen kaufte. Der Einkaufspreis aber betrug m mal weniger Thaler, als er zuerst Ellen verkaufte, und der Verkaufspreis des Restes u mal weniger Thaler. Er gewinnt so w mal so viel Thaler, als er zuerst Ellen verkaufte, und hätte g thlr. gewonnen, wenn er Alles für den Preis des Restes verkauft hätte. Wie viel Ellen hat er gekauft und wie viel Ellen zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	x − y	$\frac{y}{u}$	wy	g

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m}+g=\frac{xy}{u},$$

also $$uxy+umg=mxy,$$

folglich $umg = mxy - uxy$,

daher $\frac{umg}{y(m-u)} = x$.

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + wy = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$g - wy = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

also $uqg - uqwy = qy^2 - uxy$.

Setzt man statt x den Werth, so kommt

$$uqg - uqwy = qy^2 - \frac{u^2mgy}{y(m-u)}.$$

Alles auf einerlei Nenner gebracht, erhält man

$uqg(m-u)y - uqw(m-u)y^2 = q(m-u)y^3 - u^2mgy$.

Alles durch y dividirt, kommt

$uqg(m-u) - uqw(m-u)y = q(m-u)y^2 - u^2mg$,

oder $q(m-u)y^2 + uqw(m-u)y = u^2mg + uqg(m-u)$,

daher $y^2 + uwy = \frac{u^2mg}{q(m-u)} + ug$.

Diese Gleichung läßt sich auflösen, wenn man $m = 300$, $u = 250$, $g = 960$, $q = 400$ und $w = \frac{44}{30}$ setzt.

10) Zu Nr. 12.

Es kauft jemand Getreide und verkauft davon einen Theil, den Wispel für q mal weniger Thaler, als er Wispel gekauft hat. Der Einkaufspreis beträgt m mal und der Verkaufspreis des Restes u mal weniger Thaler, als die Anzahl der zuerst verkauften Wispel. Er gewinnt so f thlr., hätte aber z mal mehr Thaler gewonnen, als er zuerst Wispel verkaufte, wenn er für Alles den Preis des Restes bekommen hätte. Wie viel Wispel hat er eingekauft und wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	$\frac{y}{m}$	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	$\frac{y}{u}$	f	zy

Erste Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + zy = \frac{xy}{u},$$

also $uxy + umzy = mxy$.

Durch y dividirt, kommt

$$ux + umz = mx,$$

folglich

$$\frac{umz}{m-u} = x.$$

Zweite Gleichung.

$$\frac{xy}{m} + f = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - f = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

also

$$uqzy - uqf = qy^2 - uxy.$$

Den Werth für x gesetzt, kommt

$$uqzy - uqf = qy^2 - \frac{u^2mzy}{m-u}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$uqz(m-u)y - uqf(m-u) = q(m-u)y^2 - u^2mzy,$$

oder

$$q(m-u)y^2 - u^2mzy - uqz(m-u) = -uqf(m-u),$$

oder

$$q(m-u)y^2 - y[u^2mz + uqz(m-u)] = -uqf(m-u),$$

also

$$y^2 - y\left(\frac{u^2mz}{q(m-u)} + uz\right) = -uf.$$

Setzt man $m = 10$, $u = \frac{20}{3}$, $q = 25$, $z = 50$ und $f = 13500$, so läßt sich die Gleichung auflösen.

11) Zu Nr. 14.

Es kauft jemand Kaffee, den Zentner für b thlr., verkauft davon einen Theil, den Zentner für q mal weniger Thaler, als er Zentner gekauft hat, den Rest für u mal weniger Thaler, als er zuerst Zentner verkaufte. Er gewinnt so w mal so viel Thaler, als die Menge der zuerst verkauften Zentner beträgt, und hätte z mal so viel gewonnen, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Zentner hat er gekauft, wie viel zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{q}$	$x-y$	$\frac{v}{u}$	wy	zy

Erste Gleichung.

$$xb + zy = \frac{xv}{u},$$

also $uxb + uzy = xy,$

folglich $\frac{uzy}{y - ub} = x,$

Zweite Gleichung.

$$xb + wy = \frac{xy}{q} + \frac{xy}{u} - \frac{y^2}{u}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$zy - wy = \frac{y^2}{u} - \frac{xy}{q},$$

also $uqy(z - w) = qy^2 - uxy.$

Durch y dividirt, kommt

$$uq(z - w) = qy - ux.$$

Statt x den Werth gesetzt, kommt

$$uq(z - w) = qy - \frac{u^2zy}{y - ub}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, erhält man

$$uq(z - w)y - u^2bq(z - w) = qy^2 - quby - u^2zy.$$

Nach den Potenzen von y geordnet, kommt

$$qy^2 - quby + u^2zy - uq(z - w)y = -u^2bq(z - w),$$

oder $qy^2 - y[qub + u^2z + uq(z - w)] = -u^2bq(z - w),$

oder $y^2 - y\frac{u[bq + q(z - w) + uz]}{q} = \frac{-u^2bq(z - w)}{q},$

oder $y^2 - yu\left(b + z - w + \frac{uz}{q}\right) = -u^2b(z - w).$

Setzt man $u = 18$, $b = 25$, $q = 40$, $z = 25$, $w = 15$, so läßt sich die Gleichung auflösen.

§. 13.

Wir werden von dieser Art Beispielen keine mehr zu den quadratischen Gleichungen anführen. Nach der Tabelle Th. I. S. 283 und 299 kann es nicht schwer sein, eine Menge Aufgaben selbst zu bilden und Nebenfälle zu den gegebenen Hauptfällen zu erfinden. Die bisherigen Exempel werden aber hinlänglich zeigen, wie Aufgaben dieser Art zu behandeln und aufzulösen sind. Dagegen wollen wir noch die Auflösung einiger im ersten Theile erwähnten Aufgaben beifügen, die dort noch nicht gegeben werden konnten, nämlich die bei der Gesellschaftsrechnung mit Zeit noch möglichen Fälle und die verschiedenen bei den Progressionen vorkommenden Aufgaben.

§. 14.

Bei der Gesellschaftsrechnung kann man nicht bloß nach den verschiedenen Gewinnen der eingelegten Kapitale, sondern auch nach diesen fragen, wenn jene bekannt sind. Ist keine Zeit dabei, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit. Die einzelnen Gewinne sind dann die Verhältnißzahlen, nach welchen das ganze eingelegte Kapital vertheilt werden muß. Es verhält sich also auch die Summe der Gewinne zu dem ganzen Kapitale, wie jeder einzelne Gewinn zu der zugehörigen Einlage. Darüber brauchen wir keine Beispiele beizubringen. Ist aber mit dieser Rechnung noch Zeit verbunden, so ist die Auflösung etwas schwieriger. Wir wollen daher zeigen, wie sie vermittelst der Buchstabenrechnung gefunden werde.

§. 15.

Es lassen sich in diesem Falle zwei Hauptaufgaben denken. Die erste fragt nach den Einlagen, welche in der gegebenen Zeit die gegebenen Gewinne tragen; die zweite nach den Zeiten, während deren die Kapitale ausgestanden haben.

Bei der ersten Aufgabe muß die Summe der Einlagen gegeben sein, weil sonst das Exempel ganz unbestimmt wird und mehrere Auflösungen sich denken lassen. Wir wollen daher folgende Aufgabe bilden.

Eine Gesellschaft von 3 Personen geben zusammen 20000 thlr. in eine Handlung, der zweite 2 Jahre später als der erste und der dritte 3 Jahre später als der zweite. Nachdem das Kapital des ersten 10 Jahre gestanden hat, werden die Gewinne bezogen. Wenn nun der erste 2500 thlr., der zweite 2400 und der dritte 2250 thlr. gewinnt, wie viel hat jeder eingelegt?

Allgemein läßt sich die Aufgabe so darstellen. Die Summe der Einlagen sei $= m$, die einzelnen unbekannten Einlagen mögen x, y, z, die zugehörigen Zeiten p, q, r und die Gewinne a, b, c und ihre Summe s heißen.

Die Auflösung kann durch Proportionen oder durch algebraische Gleichungen geschehen.

Wählt man die erste Art, so erinnere man sich an den Satz Th. I. §. 139., daß sich die Wirkungen wie die Produkte aus den Ursachen in die Zeiten verhalten. Die gezogenen Gewinne sind die Wirkungen, die eingelegten Kapitale die Ursachen. Ihre Produkte in die Zeiten sind px, qy und rz. Also verhält sich $px : qy = a : b$.

Die

Die gleichliegenden Glieder mit einerlei Zahl p und q dividirt, kommt

$$x : y = \frac{a}{p} : \frac{b}{q},$$

oder

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = x : y.$$

Daraus ergibt sich nach Th. I. §. 121. Nr. 2.

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} : x + y = \frac{a}{p} : x = \frac{b}{q} : y.$$

Es ist aber auch

$$\frac{c}{r} : z = \frac{a}{p} : x = \frac{b}{q} : y,$$

also

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} : x + y = \frac{c}{r} : z,$$

desgleich auch

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : x + y + z = \frac{c}{r} : z = \frac{b}{q} : y = \frac{a}{p} : x.$$

Es ist aber $x + y + z = m$, also

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{c}{r} : z = \frac{b}{q} : y = \frac{a}{p} : x.$$

Bringt man nun die Brüche unter einerlei Nenner und addirt, so kommt

$$\frac{aqr + bpr + cpq}{pqr} : m = \frac{cpq}{pqr} : z = \frac{bpr}{pqr} : y = \frac{aqr}{pqr} : x.$$

Die gleichliegenden Glieder mit pqr multiplizirt, kommt

$$aqr + bpr + cpq : m = aqr : x = bpr : y = cpq : z.$$

Man bildet also drei Produkte aus den Gewinnen eines jeden in die Zeiten der beiden andern, und setzt dann auf: Die Summe dieser Produkte verhält sich zur ganzen eingelegten Summe, wie jedes dieser Produkte zur zugehörigen Einlage.

Will man lieber mit der Proportion

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{a}{p} : x = \frac{b}{q} : y = \frac{c}{r} : z$$

rechnen, so dividire man jeden Gewinn durch die zugehörige Zeit und addire diese Quotienten. Dann verhält sich ihre Summe zur Summe der Einlagen, wie jeder einzelne Quotient zur zugehörigen Einlage.

Die algebraische Auflösung ist folgende. Die Produkte aus den Einlagen in die Zeiten sind px, qy, rz, also verhält sich:

$$1)\ px + qy + rz : a = px : a,$$

also

$$a = \frac{apx}{px + qy + rz}.$$

2) $px+qy+rz : s = qy : b,$

also $$b = \frac{qsy}{px+qy+rz}.$$

3) $px+qy+rz : s = rz : c,$

also $$c = \frac{rsz}{px+qy+rz}.$$

Aus der ersten Gleichung entwickle man x. Es war

$$a = \frac{psx}{px+qy+rz},$$

also $apx+aqy+arz = psx,$

folglich $aqy+arz = psx-apx,$

oder $aqy+arz = xp(s-a),$

daher $$\frac{aqy+arz}{p(s-a)} = x.$$

Diesen Werth für x substituire man in die Gleichung

$$b = \frac{qsy}{px+qy+rz}.$$

Es ist also

$$b = \frac{qsy}{\frac{aqy+arz}{s-a}+qy+rz},$$

oder $$b = \frac{qsy(s-a)}{aqy+arz+q(s-a)y+r(s-a)z},$$

folglich $baqy+barz+bq(s-a)y+br(s-a)z = qsy(s-a).$

Einerlei unbekannte Größe auf Eine Seite gebracht, kommt

$abqy+bq(s-a)y-qsy(s-a) = -abrz-br(s-a)z,$

oder $yq[ab+b(s-a)-s(s-a)] = -zbr(a+s-a),$

oder $yq[b(a+s-a)-s(s-a)] = -zbrs,$

oder $yq[bs-s(s-a)] = -zbrs.$

Alles durch s dividirt, kommt

$yq[b-(s-a)] = -zbr,$

oder $yq(-b+s-a) = zbr,$

oder $yq(s-a-b) = zbr,$

und da $s-a-b = c$ ist, so kommt

$yqc = zbr,$

folglich $$y = \frac{zbr}{qc}.$$

Aus diesem Werthe für y läßt sich wieder ein bequemerer Werth für x bestimmen. Es war

$$x = \frac{aqy+arz}{p(s-a)},$$

also $$x = \frac{\frac{abqrz}{qc} + arz}{p(s-a)} = \frac{abrz + acrz}{cp(s-a)} = \frac{arz(b+c)}{cp(s-a)},$$

und da $b + c = s - a$ ist, so kommt

$$x = \frac{arz}{ep}.$$

Nun ist $x + y + z = m$, also

$$\frac{arz}{ep} + \frac{brz}{cq} + z = m,$$

folglich, wenn man auf einerlei Nenner bringt,

$$aqrz + brpz + cpqz = cpqm,$$

oder $$z(aqr + brp + cpq) = cpqm.$$

Daher $$z = \frac{cpqm}{arq + brp + cpq}.$$

Diesen Werth für z schreibe man in die Gleichungen für x und y, so kommt

$$x = \frac{arqm}{arq + brp + cpq},$$

$$y = \frac{brpm}{arq + brp + cpq},$$

woraus die Proportionen entstehen

$$arq + brp + cpq : m = arq : x,$$
$$arq + brp + cpq : m = brp : y,$$
$$arq + brp + cpq : m = cpq : z.$$

Dividirt man die vorhergehenden Glieder durch rqp, so entstehen die obigen Proportionen

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{a}{p} : x,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{b}{q} : y,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{c}{r} : z.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $m = 20000$, $a = 2500$, $b = 2400$, $c = 2250$ thlr., $p = 10$, $q = 10 - 2 = 8$, $r = 8 - 3 = 5$ Jahre. Es ist also

$$arq = 2500 \cdot 5 \cdot 8 = 100000,$$
$$brp = 2400 \cdot 5 \cdot 10 = 120000,$$
$$cpq = 2250 \cdot 10 \cdot 8 = 180000,$$

also $$arq + brp + cpq = 400000.$$

Daher denn die Aufsätze

$$400000 : 20000 = 100000 : x,$$

also $x = 5000$ thlr.

$$400000 : 20000 = 120000 : y,$$

also $y = 6000$ thlr.

$$400000 : 20000 = 180000 : z,$$

also $z = 9000$ thlr.

Daß für mehrere Personen die Regel nach derselben Analogie gefunden werde, erhellet von selbst. In der Proportion der Produkte wird jeder Gewinn mit den Zeiten der übrigen Personen multiplizirt und in der Proportion der Quotienten jeder Gewinn durch die dazu gehörige Zeit dividirt. Jene Produkte oder diese Quotienten werden addirt und nun verhält sich die Summe derselben zur ganzen Einlage, wie das erste Produkt oder der erste Quotient zur ersten Einlage, wie der zweite zur zweiten u. s. w. Ist also z. B. die Rede von 5 Personen, welche v, w, x, y, z eingelegt und a, b, c, d, e in den Zeiten p, q, r, t, u gewonnen haben, so verhält sich

$$aqrtu + bprtu + cpqtu + dpqru + epqrt : m = aqrtu : v,$$
$$aqrtu + bprtu + cpqtu + dpqru + epqrt : m = bprtu : w,$$
$$aqrtu + bprtu + cpqtu + dpqru + epqrt : m = cpqtu : x,$$
$$aqrtu + bprtu + cpqtu + dpqru + epqrt : m = dpqru : y,$$
$$aqrtu + bprtu + cpqtu + dpqru + epqrt : m = epqrt : z,$$

oder

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{t} + \frac{e}{u} : m = \frac{a}{p} : v,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{t} + \frac{e}{u} : m = \frac{b}{q} : w,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{t} + \frac{e}{u} : m = \frac{c}{r} : x,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{t} + \frac{e}{u} : m = \frac{d}{t} : y,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} + \frac{d}{t} + \frac{e}{u} : m = \frac{e}{u} : z.$$

§. 16.

Anstatt der Summe der Einlagen kann auch eine derselben gegeben sein. Dies gibt folgende Aufgabe:

Es legen vier Personen Geld in eine Handlung, die zweite 3 Jahre später als die erste, die dritte 2 Jahre später als die zweite, die vierte 2 Jahre später als die dritte. Nachdem das erste Kapital 12 Jahre gestanden hat, so werden nach der Reihe

die Gewinne von 2400, 2700, 1750 und 2000 thlr. bezogen. Wenn man nun weiß, daß die erste 4000 thlr. eingelegt hat, wie viel die übrigen?

Es seien die Einlagen o, x, y, z, die zugehörigen Zeiten p, q, r, t, die Gewinne a, b, c, d.

Nach Th. I. §. 139. verhält sich

$$po : qx = a : b,$$

also $$aqx = pob,$$

folglich $$x = \frac{pob}{aq}.$$

$$po : ry = a : c,$$

also $$ary = poc,$$

folglich $$y = \frac{poc}{ar}.$$

$$po : tz = a : d,$$

also $$atz = pod,$$

folglich $$z = \frac{pod}{at}.$$

Oder man kann auch nach dem Satze rechnen: Die Ursachen verhalten sich wie die Wirkungen durch die Zeiten dividirt. Dies gibt die Proportionen:

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = o : x,$$

$$\frac{a}{p} : \frac{c}{r} = o : y,$$

$$\frac{a}{p} : \frac{d}{t} = o : z.$$

Nach den Zahlen des Exempels also hat man

$$\frac{2400}{12} : \frac{2700}{9} = 4000 : x,$$

oder $$200 : 300 = 4000 : x,$$

also $$x = 6000 \text{ thlr.}$$

$$\frac{2400}{12} : \frac{1750}{7} = 4000 : y,$$

oder $$200 : 250 = 4000 : y,$$

also $$y = 5000 \text{ thlr.}$$

$$\frac{2400}{12} : \frac{2000}{5} = 4000 : z,$$

oder $$200 : 400 = 4000 : z,$$

also $$z = 8000 \text{ thlr.}$$

Für mehrere Personen ergibt sich die Analogie von selbst.

§ 17.

Sind Einlagen und Gewinne gegeben und die Zeiten unbekannt, so lassen sich zwei Fälle denken, wenn die Aufgabe bestimmt werden soll. Es kann erstlich bekannt sein, wie groß die Summe der unbekannten Zeiten ist. Dann ist die Auflösung ganz dieselbe, wie oben, wo man die Summe der unbekannten Einlagen wußte. Das dortige m bedeute also jetzt die Summe der Zeiten, diese Zeiten selbst seien x, y, z; die Einlagen p, q, r; die Gewinne a, b, c. Man hat daher wieder die Proportionen:

$$aqr + brp + cpq : m = aqr : x,$$
$$aqr + brp + cpq : m = brp : y,$$
$$aqr + brp + cpq : m = cpq : z,$$

oder

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{a}{p} : x,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{b}{q} : y,$$
$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} : m = \frac{c}{r} : z.$$

Es sei folgende Aufgabe gegeben:

Drei Personen legen, der erste 4000 thlr., der zweite 6000 thlr., der dritte 10000 thlr., in eine Handlung und gewinnen damit nach einiger Zeit, der erste 3000 thlr., der zweite 5000 thlr., der dritte 6000 thlr.; wie lange hat jedes Kapital gestanden, wenn man weiß, daß 20 Jahre herauskommen, wenn man alle einzelne Zeiten zusammen addirt?

Es ist $a = 3000$, $b = 5000$, $c = 6000$, $m = 20$, $p = 4000$, $q = 6000$, $r = 10000$. Also

$$aqr = 3000 . 6000 . 10000 = 180000000000,$$
$$brp = 5000 . 10000 . 4000 = 200000000000,$$
$$cpq = 6000 . 4000 . 6000 = 144000000000,$$
$$aqr + brp + cpq = 524000000000.$$

Daher $524000000000 : 20 = 180000000000 : x,$

oder $524 : 20 = 180 : x,$

oder $131 : 5 = 180 : x,$

also $x = \frac{900}{131} = 6\frac{114}{131}$ Jahr.

$131 : 5 = 200 : y,$

also $y = \frac{1000}{131} = 7\frac{83}{131}$ Jahr.

$131 : 5 = 144 : z,$

$z = \frac{720}{131} = 5\frac{65}{131}$ Jahr.

Es kann zweitens bekannt sein, wie lange das erste Kapital gestanden hat, als die Gewinne von allen bezogen wurden. Dies gibt folgende Aufgabe:

Es legen drei Personen Geld in eine Handlung, die erste 8000 thlr., die zweite 10000 thlr., die dritte 9000 thlr. Die Gewinne von 4400 thlr., 4500 thlr. und 2700 thlr. werden bezogen, nachdem das erste Kapital 11 Jahre gestanden hat. Wie lange sind die beiden übrigen ausgethan gewesen?

Die Rechnung ist wie in §. 16. Es seien allgemein die eingelegten Kapitale p, q, r, die Zeit des ersten = o, die der beiden andern x und y, die Gewinne a, b, c, so verhält sich auch

$$a : b = po : qx,$$

also

$$x = \frac{pob}{aq}.$$

$$a : c = po : ry,$$

also

$$y = \frac{poc}{ar}.$$

Oder es verhält sich, vermöge des Satzes: die Zeiten verhalten sich wie die Wirkungen, dividirt durch die Ursachen,

$$\frac{a}{p} : \frac{b}{q} = o : x,$$

also

$$x = \frac{pob}{aq}.$$

$$\frac{a}{p} : \frac{c}{r} = o : y,$$

also

$$y = \frac{poc}{ar}.$$

Nach diesen Proportionen das Exempel berechnet, kommt $x = 9$ Jahre und $y = 6$ Jahre.

§. 18.

In Th. I. §. 162. sind die verschiedenen Fälle erwähnt, welche bei arithmetischen Progressionen Aufgaben bilden können. Diese wollen wir jetzt erörtern und Beispiele dazu geben.

In jeder arithmetischen Progression lassen sich fünf Stücke betrachten und jedesmal die übrigen finden, wenn drei davon gegeben sind. Daraus entstehen zehn verschiedene Aufgaben. Denn wenn man von fünf Größen immer zwei unbekannt setzt, und fragt, wie vielmal dies geschehen kann, so heißt das: man will wissen, wie viel strenge Kombinationen des zweiten Grades (Th. I. §. 184.) unter fünf Größen möglich sind. Die Antwort

ist nach §. 185., es gibt, wenn m die gegebene Anzahl der Größen bedeutet $\frac{m(m-1)}{2}$ strenge Kombinationen, also wenn $m = 5$ ist, so ist die Anzahl derselben $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Es sei a das erste Glied, d die Differenz, n die Anzahl der Glieder, u das letzte Glied und s die Summe der Progression. Folgende Tabelle gibt dann eine Übersicht der zehn Fälle.

Gegeben.	Gesucht.
a, d, n.	u, s.
a, d, u.	n, s.
a, d, s.	n, u.
a, n, u.	d, s.
a, n, s.	d, u.
a, u, s.	d, n.
d, n, u.	a, s.
d, n, s.	a, u.
d, u, s.	a, n.
n, u, s.	a, d.

Erste Aufgabe.

Es will jemand ein Haus kaufen und kann mit dem Verkäufer über den Preis nicht einig werden. Gut, sagt dieser, es sind in dem Vorder- und Hintergebäude, kleine und große zusammen gerechnet, 40 Fenster. Wollen Sie mir nicht 2000 thlr. geben, so zahlen Sie mir für das erste Fenster 3 thlr., für das zweite 6 thlr. und so für jedes folgende immer 3 thlr. mehr. Die Frage ist, wie theuer würde dem Käufer das Haus zu stehen kommen und wie viel müßte er für das letzte Fenster bezahlen?

Die Antwort auf die erste Frage gibt Th. I. §. 161. Der Verkaufspreis des Hauses wäre die Summe s einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $a = 3$ thlr., der Unterschied $d = 3$ thlr., die Anzahl der Glieder $n = 40$ wäre. Also ist

$$s = an + \frac{n(n-1)d}{2}$$
$$= 3 \cdot 40 + \frac{40 \cdot 39 \cdot 3}{2}$$
$$= 120 + 20 \cdot 39 \cdot 3$$
$$= 120 + 2340 = 2460 \text{ thlr.}$$

Die zweite Frage beantwortet §. 159. Es ist das letzte Glied $u = a + (n-1)d = 3 + 39 \cdot 3 = 3 + 117 = 120$ thlr.

Der Käufer müßte also, wenn er den Akkord einginge, 2460 anstatt 2000 thlr. zahlen.

Zweite Aufgabe.

Ein kranker Herr beklagt sich gegen seinen Bedienten, daß er schon in seinen besten Jahren sterben müsse. Sie werden nicht sterben, tröstet dieser, sondern noch viele Jahre leben. Ach, wenn Du Recht hättest, antwortet der Herr, so wollte ich Dir mit jedem Jahre, daß ich noch lebe, immer 3 thlr. mehr an Lohn geben, als Du in dem vorhergehenden bekommen hast. Der Herr wird in der That wieder gesund und lebt noch mehrere Jahre, so daß er im letzten Jahre vor seinem Tode dem Diener noch 58 thlr. zu seinem gewöhnlichen Lohn zulegen muß. Wie lange hat der Herr noch gelebt, und wie viel hat der Diener, außer dem gewöhnlichen Lohne, von ihm überhaupt erhalten?

Die bekannten Größen sind a, d, u, nämlich $a = 1$, $d = 3$, $u = 58$; gesucht wird die Anzahl der Jahre $= n$ und die Summe der Progression $= s$.

Nach Th. I. §. 159. ist

$$u = a + (n-1)d,$$

also $$u - a = (n-1)d,$$

folglich $$\frac{u-a}{d} = n - 1,$$

und daher $$\frac{u-a}{d} + 1 = n.$$

Setzt man diesen Werth anstatt n in die Formel für s in Th. I. §. 161., wo $s = \frac{n(a+u)}{2}$ ist, so ist

$$s = \left(\frac{u-a}{d} + 1\right)\left(\frac{a+u}{2}\right)$$

$$= \frac{(u-a)(u+a)}{2d} + \frac{u+a}{2}$$

$$= \frac{(u-a)(u+a) + d(u+a)}{2d}$$

$$= \frac{(u-a+d)(u+a)}{2d}.$$

Man findet also die Anzahl der Jahre, wenn man den Unterschied des ersten und letzten Gliedes durch die Differenz dividirt und zum Quotienten noch 1 hinzurechnet. Der Herr hat also noch gelebt $\frac{58-1}{3} + 1 = \frac{57}{3} + 1 = 20$ Jahre.

Die Summe der Progression findet sich, wenn man zum Unterschiede des ersten und letzten Gliedes noch die Differenz addirt, die erhaltene Summe mit der Summe des ersten und

letzten Gliedes multiplizirt und das Produkt durch die doppelte Differenz dividirt. Es ist also

$$s = \frac{(58-1+3)(58+1)}{2.3}$$
$$= \frac{60.59}{6} = 10.59 = 590 \text{ thlr.}$$

Dritte Aufgabe.

Es wird ein Brunnen gegraben. Für den ersten Fuß in die Tiefe bekommt ein Arbeiter 2 gr., für den zweiten Fuß 3 gr. und so für jeden folgenden Fuß 1 gr. mehr. Wie tief war der Brunnen, wenn man weiß, daß ein Arbeiter zusammen $138\frac{1}{3}$ thlr. bekam, und wie viel wurde für den letzten Fuß Tiefe bezahlt?

Es wird also von einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied, Summe und Differenz bekannt ist, das letzte Glied und die Anzahl der Glieder gesucht. Es ist

$$u = a + (n-1)d,$$

also $$u - a = (n-1)d,$$

folglich $$\frac{u-a}{d} = n-1,$$

daher $$\frac{u-a}{d} + 1 = n.$$

Ferner ist $$s = an + \frac{n(n-1)d}{2},$$

also $$2s = 2an + n(n-1)d,$$

oder $$2s = 2an + n^2d - nd.$$

Diese quadratische Gleichung geordnet, kommt

$$n^2d + 2an - nd = 2s,$$

oder $$n^2 + n\frac{2a-d}{d} = \frac{2s}{d}.$$

Diese Gleichung gehört zur Form $x^2 + px = q$, also ist

$$1)\ x = \frac{-p+\sqrt{(p^2+4q)}}{2}$$

$$2)\ x = \frac{-p-\sqrt{(p^2+4q)}}{2}.$$

Der letztere negative Werth gibt keinen Sinn, wir haben es daher nur mit dem ersten zu thun.

Es ist $a = 2$ gr., $d = 1$ gr., $s = 138\frac{1}{3}$ thlr. $= 3320$ gr., folglich ist $p = \frac{2a-d}{d} = \frac{4-1}{1} = 3$ und $q = \frac{2s}{d} = \frac{6640}{1} = 6640$.

Also $x = \frac{-3+\sqrt{(9+4.6640)}}{2}$

$= \frac{-3+\sqrt{26569}}{2}$

$= \frac{-3+163}{2} = \frac{160}{2} = 80.$

Es war also der Brunnen 80 Fuß tief, und da $u = a+(n-1)d$ ist, so ist $u = 2+79.1 = 81$ gr. $= 3$ thlr. 9 gr.; mit dieser Summe wird der letzte Fuß zu graben bezahlt.

Vierte Aufgabe.

Es hat sich jemand verpflichtet, dem Andern 50 Jahre lang eine gewisse Summe so zu zahlen, daß er im ersten Jahre 3 thlr. und jedes Jahr eine bestimmte Anzahl Thaler mehr gibt, als im vorhergehenden Jahre. Wenn man nun weiß, daß er im letzten Jahre 150 thlr. zu zahlen hatte, wie viel hat er jedes Jahr mehr gegeben und wie groß war die ganze zu zahlende Summe?

Es ist bekannt a, n und u; gesucht wird d und s. Nun ist

$$u = a+(n-1)d,$$

also $$u-a = (n-1)d,$$

folglich $$\frac{u-a}{n-1} = d.$$

Da $u = 150$ thlr., $a = 3$ thlr. und $n = 50$ ist, so ist

$$d = \frac{150-3}{50-1} = \frac{147}{49} = 3 \text{ thlr.}$$

Ferner ist $s = \frac{n(a+u)}{2} = \frac{50(3+150)}{2}$

$= 25.153 = 3825$ thlr.

Fünfte Aufgabe.

Es nimmt jemand im ersten Jahre 50 thlr. Zinsen ein, vermehrt aber jährlich sein Kapital so, daß er mit jedem Jahre eine bestimmte Summe mehr an Zinsen einnimmt. Wenn dieses nun 40 Jahre lang so fortdauert und man weiß, daß er in allen 40 Jahren zusammen 12560 thlr. an Zinsen gehoben hat, wie viel hat er jedes Jahr mehr Zinsen und wie viel im letzten Jahre überhaupt eingenommen?

Bekannt sind a, n, s; gesucht werden d und u. Es ist

$$s = an + \frac{n(n-1)d}{2},$$

also $$2s = 2an + n(n-1)d$$

und $2s - 2an = n(n-1)d$,

folglich $\frac{2s-2an}{n(n-1)} = \frac{2(s-an)}{n(n-1)} = d$.

Da nun $u = a + (n-1)d$, ſo iſt

$$u = a + \frac{(n-1)(2s-2an)}{n(n-1)}$$

$$= a + \frac{2s-2an}{n}$$

$$= \frac{an+2s-2an}{n}$$

$$= \frac{2s-an}{n} = \frac{2s}{n} - a.$$

In den Zahlen des Exempels iſt daher

$$d = \frac{2(12560-80.40)}{40.39}$$

$$= \frac{2\cdot 2360}{1560} = \frac{236}{78}$$

$$= 12 \text{ thlr.}$$

$$u = \frac{2\cdot 12560}{40} - 80$$

$$= \frac{12560}{20} - 80$$

$$= 628 - 80 = 548 \text{ thlr.}$$

Er hat alſo jedes Jahr 12 thlr. mehr an Zinſen eingenommen und im letzten Jahre zuſammen 548 thlr. Zinſen.

Sechſte Aufgabe.

Es hat jemand ein Vermögen von 6000 thlr., von dem er in jedem Jahre eine gewiſſe Summe zuſetzen muß. Wenn man nun weiß, daß er im letzten Jahre 750 thlr. davon nimmt, im erſten Jahre aber 50 thlr. davon genommen hat, in wie viel Jahren wird er das ganze Vermögen zugeſetzt und wie viel wird er jedes Jahr mehr davon genommen haben?

Es iſt in dieſer Aufgabe s, u und a gegeben, d und n wird geſucht. Es iſt

$$s = an + \frac{n(n-1)d}{2},$$

alſo $2s = 2an + n(n-1)d$,

folglich $2s - 2an = n(n-1)d$,

oder $2(s-an) = n(n-1)d$,

daher $\frac{2(s-an)}{n(n-1)} = d$.

Ferner ist $u = a + (n-1)d$,
oder $u - a = (n-1)d$,
daher $\frac{u-a}{n-1} = d$.

Also $\frac{2(s-an)}{n(n-1)} = \frac{u-a}{n-1}$,
daher $2s - 2an = \frac{(u-a)[n(n-1)]}{n-1}$,
oder $2s - 2an = (u-a)n$,
oder $2s - 2an = un - an$,
also $2s = un - an + 2an$,
oder $2s = un + an$,
oder $2s = (u+a)n$,
folglich $\frac{2s}{u+a} = n$.

Daher $$d = \frac{u-a}{\frac{2s}{u+a} - 1},$$
oder $$d = \frac{u-a}{\frac{2s-(u+a)}{u+a}}$$
$$= \frac{(u-a)(u+a)}{2s-(u+a)}.$$

Es ist $a = 50$, $s = 6090$, $u = 750$, also
$$n = \frac{12000}{750+50} = \frac{12000}{800} = 15.$$
In 15 Jahren ist folglich das Kapital aufgezehrt.
$$d = \frac{(750-50)(750+50)}{12000 - (750+50)}$$
$$= \frac{700 \cdot 800}{11200} = \frac{700}{14} = 50.$$

Jedes Jahr sind also 50 thlr. mehr verzehrt worden, als im vorhergehenden.

Siebente Aufgabe.

Ein Schuldner verspricht seinem Gläubiger seine Schuld in 12 Jahren so abzuzahlen, daß er jedes Jahr 50 thlr. mehr, als im vorhergehenden gibt. Wenn man nun weiß, daß er im letzten Jahre 650 thlr. gibt, wie viel zahlt er im ersten Jahre, und wie viel beträgt die schuldige Summe?

Die bekannten Größen sind d, n und u, die gesuchte a und s. Es ist $u = a + (n-1)d$,
also $u - (n-1)d = a$.

Ferner ist $s = an + \frac{n(n-1)d}{2}$, $s - a$

daher $s = nu - n(n-1)d + \frac{n(n-1)d}{2}$,

$2s = 2nu - 2n(n-1)d + n(n-1)d$

$= 2nu - n(n-1)d$,

$s = \frac{n[2u-(n-1)]d}{2}$.

Es ist $d = 50$, $n = 12$, $u = 650$, also

$a = 650 - 11 \cdot 50$

$= 650 - 550 = 100$ thlr.

$s = \frac{12(2 \cdot 650 - 11 \cdot 50)}{2}$

$= \frac{12(1300-550)}{2}$

$= \frac{12 \cdot 750}{2} = 6 \cdot 750$

$= 4500$ thlr.

Er war also 4500 thlr. schuldig, bezahlte im ersten Jahre 100 thlr., in den folgenden jedesmal 50 thlr. mehr und tilgte so die Schuld in 12 Jahren.

Achte Aufgabe.

Es erhält jemand innerhalb 20 Jahren eine Summe von 1620 thlr. und zwar so, daß er in jedem Jahre 2 thlr. mehr, als im vorhergehenden bekommt. Wie viel sind ihm im ersten und letzten Jahre ausgezahlt worden?

Die bekannten Größen sind d, n und s, die unbekannten a und u. Es ist $s = an + \frac{n(n-1)d}{2}$,

also $2s = 2an + n(n-1)d$,

folglich $2s - n(n-1)d = 2an$,

daher $\frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2} = a$.

Ferner $u = a + (n-1)d$,

daher $u = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2} + (n-1)d$

$= \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2} + \frac{2(n-1)d}{2}$

$= \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$.

Es ist $d = 2$ thlr., $n = 20$ Jahr, $s = 1620$ thlr.,

also $a = \frac{1620}{20} - \frac{19 \cdot 2}{2} = 81 - 19 = 62$ thlr.

$u = \frac{1620}{20} + \frac{19 \cdot 2}{2} = 81 + 19 = 100$ thlr.

Neunte Aufgabe.

Es wird ein Brunnen gegraben; der ganze Arbeitslohn beträgt 610 thlr. = 14640 gr. und für den letzten Fuß zu graben werden 10 thlr. 1 gr. = 241 gr. bezahlt. Wenn man nun weiß, daß für jeden Fuß in die Tiefe immer 2 gr. mehr bezahlt worden sind, als für den vorhergehenden, wie viel wurde für den ersten Fuß gegeben und wie tief war der Brunnen?

Bekannt sind d, u, s, gesucht wird a und n. Es ist

$$u = a + (n-1)d,$$

also $u - (n-1)d = a.$

Ferner ist $s = \frac{(a+u)n}{2}$

$$= \frac{[u-(n-1)d+u]n}{2},$$

also $2s = [2u - (n-1)d]n$

$$= 2un - n(n-1)d,$$

daher $n(n-1)d - 2un = -2s,$

oder $dn^2 - nd - 2un = -2s,$

oder $n^2 - n\frac{d+2u}{d} = -\frac{2s}{d}.$

Es ist dies eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 - px = -q$.

Es ist $d = 2$ gr., $u = 241$ gr., $s = 14640$ gr., also

$$n^2 - n\frac{484}{2} = -\frac{2 \cdot 14640}{2},$$

oder $n^2 - 242n = -14640.$

Daher 1) $n = \frac{p + \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$$= \frac{242 + \sqrt{242^2 - 58560)}}{2}$$

$$= \frac{242 + \sqrt{(58564 - 58560)}}{2}$$

$$= \frac{242 + \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{242+2}{2} = 122 \text{ Fuß.}$$

2) $n = \frac{p - \sqrt{(p^2 - 4q)}}{2}$

$$= \frac{242-2}{2} = 120 \text{ Fuß.}$$

Daraus ergibt sich

1) $a = u-(n-1)d = 241-(122-1)2$
$= 241-121.2 = 241-242 = -1$ gr.

2) $a = u-(n-1)d = 241-(120-1)2$
$= 241-119.2 = 241-238 = 3$ gr.

Die ersten Werthe für n und a geben keine passende Auflösung. Da a negativ kommt, so würden die Arbeiter für den ersten Fuß nicht nur nichts bekommen, sondern umgekehrt einen Groschen zahlen und erst für den zweiten Fuß einen Groschen erhalten, weil $-1+2=1$ ist. In diesem Falle ist der Brunnen 122 Fuß tief geworden und der letzte Fuß hat 10 thlr. 1 gr., die ganze Tiefe zu graben aber 610 thlr. gekostet.

Nach den zweiten Werthen aber wurde für den ersten Fuß 3 gr., für den zweiten 5 gr. u. s. w. gegeben. Alsdann wird der Brunnen nur 120 Fuß tief, der letzte Fuß kostet auch 10 thlr. 1 gr. und die ganze Arbeit 610 thlr.

Zehnte Aufgabe.

Es zahlt jemand innerhalb 16 Jahren die Summe von 2600 thlr. so, daß er in jedem Jahre eine bestimmte Summe mehr gibt, als im vorhergehenden. Wenn man nun weiß, daß er im letzten Jahre 200 thlr. gezahlt hat, wie viel gab er im ersten Jahre und wie viel jedes Jahr mehr?

Bekannt ist n, u, s, gesucht wird a und d. Es ist

$$s = \frac{n(a+u)}{2} = \frac{na+nu}{2},$$

also $2s = na+nu,$

folglich $2s-nu = na,$

daher $\frac{2s-nu}{n} = a.$

Ferner ist $u = a+(n-1)d,$

also $u = \frac{2s-nu}{n}+(n-1)d$

$= \frac{2s-nu+n(n-1)d}{n},$

folglich $un = 2s-nu+n(n-1)d,$

oder $2nu-2s = n(n-1)d,$

oder $\frac{2(nu-s)}{n(n-1)} = d.$

Es

Es ist $n = 16$, $u = 200$, $s = 2000$, also

$$a = \frac{2s - nu}{n} = \frac{4000 - 3200}{16} = \frac{800}{16} = 50 \text{ thlr.}$$

$$d = \frac{2(nu - s)}{n(n-1)} = \frac{2(3200 - 2000)}{16 \cdot 15} = \frac{2400}{16 \cdot 15} = \frac{150}{15} = 10 \text{ thlr.}$$

Es hat also derselbe im ersten Jahre 50 thlr., und in jedem folgenden 10 thlr. mehr gezahlt.

§. 19.

Auch bei geometrischen Progressionen lassen sich aus drei bekannten Stücken die übrigen zwei (Th. I. §. 170.) finden und dies giebt aus denselben Gründen, wie §. 18. erörtert sind, ebenfalls zehn verschiedene Aufgaben. Wenn das erste Glied $= a$, der Exponent $= e$, das letzte Glied $= u$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe der Progression $= s$ ist, so wird sich über die zehn Fälle folgende Tabelle machen lassen:

Gegeben.	Gesucht.
a, e, n.	u, s.
a, e, u.	n, s.
a, e, s.	n, u.
a, n, u.	e, s.
a, n, s.	e, u.
a, u, s.	e, n.
e, n, u.	a, s.
e, n, s.	a, u.
e, u, s.	a, n.
n, u, s.	a, e.

Erste Aufgabe.

Es legt jemand in der ersten Woche 3 pf., in der zweiten doppelt so viel und so in jeder folgenden Woche immer das Doppelte der vorhergehenden zurück. Wenn er nun dieses Sammeln 20 Wochen fortsetzt, wie groß ist die ganze zurückgelegte Summe, und wie viel mußte er in der letzten Woche dazu beitragen?

Es ist bekannt a, e, n, gesucht wird u und s.

Nach Th. I. §. 165. ist

$$u = ae^{n-1},$$

also

$$u = 3 \cdot 2^{19}$$
$$= 3 \cdot 524288$$
$$= 1572864 \text{ pf.}$$
$$= 5461 \text{ thlr. } 8 \text{ gr.}$$

und nach Th. I. §. 169.

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$$
$$= \frac{3 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1},$$

also
$$s = 3 \cdot (2^{20} - 1)$$
$$= 3 \cdot (1048576 - 1)$$
$$= 3 \cdot 1048575$$
$$= 3145725 \text{ pf.}$$
$$= 10992 \text{ thlr. } 2 \text{ gr. } 5 \text{ pf.}$$

In der letzten Woche mußte er also 5461 thlr. 8 gr. zurücklegen, und so konnte er 10992 thlr. 2 gr. 5 pf. in 20 Wochen sammeln.

Zweite Aufgabe.

Es will jemand einen Garten kaufen, kann aber über den Preis nicht einig werden, da der Verkäufer 4000 thlr. verlangt. Nun, sagt letzterer, wenn Sie mir, was ich verlange, nicht geben wollen, so bezahlen Sie mir bloß die Pfirsichbäume im Garten. Ich will für den ersten nicht mehr als einen Pfennig, für den zweiten 2 pf., für den dritten 4 pf. und so für jeden folgenden doppelt so viel Pfennige als für den vorhergehenden haben. Wenn man nun weiß, daß er für den letzten Baum die Summe von 58254 thlr. 5 gr. 4 pf. = 16777216 pf. zahlen muß, wie viel Pfirsichbäume waren im Garten, und wie viel betrug die zu zahlende Summe?

Bekannt sind a, e und u, gesucht werden n und s. Es ist

$$u = ae^{n-1},$$

folglich
$$\frac{u}{a} = e^{n-1}.$$

Multiplizirt man auf beiden Seiten mit e, so kommt

$$\frac{ue}{a} = e^n.$$

Es kommt also jetzt darauf an, zu finden, welche Potenz von e die Zahl $\frac{ne}{a}$ ist, und dies lehrt die Aufgabe Th. I. §. 210.

Es ist nämlich
$$\text{Log.} \frac{ne}{a} = n \cdot \text{Log. e},$$

folglich
$$\frac{\text{Log.} \frac{ne}{a}}{\text{Log. e}} = n.$$

Hat man n bestimmt, so läßt sich s finden, denn

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Nach den Zahlen der Aufgabe ist a = 1, e = 2 und u = 16777216, also

$$\frac{ue}{a} = \frac{16777216 \cdot 2}{1} = 33554432,$$

daher $n = \frac{\text{Log. } 33554432}{\text{Log. } 2} = \frac{7,5257499}{0,3010300} = 25.$

Es ist folglich

$$s = \frac{a(e^{25} - 1)}{e - 1} = \frac{2^{25} - 1}{2 - 1} = 2^{25} - 1 = 33554431 \text{ pf.}$$
$$= 2796202 \text{ gr. } 7 \text{ pf.} = 116508 \text{ thlr. } 10 \text{ gr. } 7 \text{ pf.}$$

Es waren daher 25 Pfirsichbäume im Garten, und wenn der Akkord eingegangen wurde, so mußte der Käufer 116508 thlr. 10 gr. 7 pf. bezahlen.

Dritte Aufgabe.

Die Summe einer geometrischen Progression ist = 292968, das erste Glied = 3, der Exponent = 5; es soll die Anzahl der Glieder und das letzte Glied derselben bestimmt werden.

Es ist a, e und s bekannt, n und u wird gesucht. Nun ist

$$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1},$$

also $s(e - 1) = a(e^n - 1),$

folglich $\frac{s(e-1)}{a} = e^n - 1,$

daher $\frac{s(e-1)}{a} + 1 = e^n,$

also $\frac{\text{Log.}\left(\frac{s(e-1)}{a} + 1\right)}{\text{Log. } e} = n.$

Hat man n bestimmt, so ist

$$u = ae^{n-1}.$$

Nach den Zahlen des Exempels ist

$$\frac{s(e-1)}{a} + 1 = \frac{292968 \cdot 4}{3} + 1 = \frac{1171872}{3} + 1 = 390625,$$

also $\frac{\text{Log.}\left(\frac{s(e-1)}{a} + 1\right)}{\text{Log. } e} = \frac{\text{Log. } 390625}{\text{Log. } 5} = \frac{5,5917600}{0,6989700} = 8.$

Ist nun $n = 8$, so ist

$$u = 3 \cdot 5^7 = 3 \cdot 78125 = 234375.$$

Vierte Aufgabe.

Wenn jemand im ersten Jahre seines Lebens 3 pf. zurücklegt, wie viel wird er in einem Alter von 12 Jahren gesammelt, und wie vielmal in jedem Jahre mehr, als im vorhergehenden zurückgelegt haben, wenn man weiß, daß er im letzten Jahre 1845 thlr. 1 gr. 9 pf. = 531441 pf. zurückgelegt hat.

Es ist a, n und u bekannt, gesucht wird e und s.

Da $u = ae^{n-1}$ ist, so ist

$$\frac{u}{a} = e^{n-1},$$

also

$$\text{Log.}\frac{u}{a} = (n-1).\text{Log.}\, e,$$

folglich

$$\frac{\text{Log.}\frac{u}{a}}{n-1} = \text{Log.}\, e.$$

Hat man e bestimmt, so findet sich s durch die Formel

$$s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Es ist $a = 3$, $n = 12$, $u = 531441$, also $\frac{u}{a} = 177147$ und $\text{Log.}\frac{u}{a} = \text{Log.}\, 177147 = 5{,}2483338$; dies wird durch $n-1 = 12-1 = 11$ dividirt. Der Quotient ist

$$0{,}4771213 = \text{Log.}\, e.$$

Schlägt man nun diesen Logarithmen in den Tafeln auf, so findet man $e = 3$.

Nun ist $s = \frac{3.(3^{12}-1)}{3-1} = \frac{3.(3^{12}-1)}{2} = \frac{3.(531441-1)}{2}$

$= \frac{1594320}{2} = 797160$ pf. = 2767 thlr. 22 gr.

Fünfte Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression ist das erste Glied $= 5$, die Anzahl der Glieder $= 10$ und die Summe der Progression $= 5115$; man soll den Exponenten der Progression und das letzte Glied derselben finden.

Es ist $s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$, also da $n = 10$ ist, so ist

$$s = \frac{a(e^{10}-1)}{e-1},$$

oder $$\frac{s}{a} = \frac{e^{10}-1}{e-1}.$$

Dividirt man nun $e^{10}-1$ durch $e-1$, so kommt

$$e^9+e^8+e^7+e^6+e^5+e^4+e^3+e^2+e+1.$$

Also ist

$$\frac{s}{a} = e^9+e^8+e^7+e^6+e^5+e^4+e^3+e^2+e+1.$$

Dies ist eine Gleichung vom neunten Grade, von deren Auflösung erst unten die Rede sein kann. Probirt man für e nach und nach die Zahlen 1, 2 u. s. w., so wird man finden, daß $e = 2$ ein richtiger Werth ist, denn $2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$ ist $= \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$.

Wie groß auch n sein mag, so gibt immer der Quotient $\frac{e^n-1}{e-1}$ eine Reihe von der Form

$$e^{n-1}+e^{n-2}+e^{n-3}+e^{n-4}+e^{n-5}+e^{n-6}\ldots\ldots+e^{n-n},$$

d. h. die Division wird aufgehen, sobald das, was vom Exponenten n abgezogen wird, so groß als n selbst ist. Das letzte Glied des Quotienten ist daher immer $= 1$, weil $e^{n-n} = e^0 = 1$ ist. Ist e bestimmt, so weiß man auch das letzte Glied, denn $u = ae^{n-1} = 5.2^9 = 5.512 = 2560$.

Sechste Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression ist das erste und letzte Glied nebst der Summe der Glieder gegeben; man soll daraus den Exponenten und die Anzahl der Glieder bestimmen.

Bekannt sind also a, u und s, gesucht wird e und n.

Es ist $$u = ae^{n-1},$$

also $$\frac{u}{a} = e^{n-1}$$

und $$\frac{ue}{a} = e^n.$$

Ferner ist $$s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Setzt man nun statt e^n den gefundenen Werth, so kommt

$$s = \frac{a\left(\frac{ue}{a}-1\right)}{e-1},$$

also $$s(e-1) = ue-a,$$

oder $s(e-1)-ue = -a,$

oder $se-s-ue = -a,$

folglich $se-ue = s-a,$

oder $e(s-u) = s-a,$

daher $e = \frac{s-a}{s-u}.$

Ist nun e bekannt, so findet man aus der Gleichung $\frac{ue}{a} = e^n$ den Werth von n, denn es ist

$$\text{Log.}\frac{ue}{a} = n \cdot \text{Log.}\, e,$$

also $$\frac{\text{Log.}\frac{ue}{a}}{\text{Log.}\, e} = n.$$

Es sei $a = 4,\ u = 4649045868$ und $s = 6973568800.$

Also $\frac{s-a}{s-u} = \frac{6973568796}{2324522932} = 3 = e.$

Daher $$n = \frac{\text{Log.}\frac{ue}{a}}{\text{Log.}\, e} = \frac{\text{Log.}\frac{4649045868 \cdot 3}{4}}{\text{Log.}\, 3} = \frac{\text{Log.}\, 3486784401}{\text{Log.}\, 3} = \frac{9,5424251}{0,4771213} = 20.$$

Siebente Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression ist der Exponent e, die Zahl der Glieder n und das letzte Glied u bekannt; man soll das erste Glied und die Summe der Progression finden.

Es ist $u = ae^{n-1},$

also $$\frac{u}{e^{n-1}} = a.$$

Ferner ist $$s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}.$$

Setzt man statt a den Werth, so kommt

$$s = \frac{\frac{u}{e^{n-1}}(e^n-1)}{e-1} = \frac{u(e^n-1)}{(e^{n-1})(e-1)}.$$

Dividirt man nun $e^n - 1$ durch $e - 1$, so kommt

$$e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots\ldots + e^{n-n}.$$

Also $$s = \frac{u(e^{n-1} + e^{n-2} + e^{n-3} \ldots\ldots + 1)}{e^{n-1}}.$$

Dividirt man auch den in Klammer eingeschlossenen Faktor von u durch e^{n-1}, so kommt

$$s = u\left(1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} \ldots\ldots + e^{1-n}\right),$$

oder $$s = u\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \ldots\ldots + \frac{1}{e^{n-1}}\right).$$

Was in der Klammer steht, ist eine geometrische Progression, deren erstes Glied $= 1$, der Exponent $= \frac{1}{e}$ ist.

Die Summe dieser Reihe ist also $= \frac{\frac{1}{e^n} - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - e}$

und folglich das gesuchte $s = \frac{u\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}{1 - \frac{1}{e}}$.

Es sei $e = 4$, $n = 8$, $u = 98304$, so ist

$$a = \frac{u}{e^{n-1}} = \frac{98304}{4^7} = \frac{98304}{16384} = 6,$$

und

$$s = \frac{98304\left(1 - \frac{1}{4^8}\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{98304\left(\frac{65536}{65536} - \frac{1}{65536}\right)}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{98304 \cdot 65535}{65536} \cdot \frac{4}{3}$$

$$= \frac{98304 \cdot 21845}{16384}$$

$$= 6 \cdot 21845 = 131070.$$

Achte Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression ist der Exponent, die Zahl der Glieder und die Summe derselben gegeben; man soll das erste und letzte Glied finden.

Bekannt sind e, n und s, gesucht werden a und u. Es ist

$$u = ae^{n-1},$$

also $$\frac{u}{e^{n-1}} = a.$$

Ferner ist $$s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}.$$

Setzt man nun statt a den gefundenen Werth, so kommt

$$s = \frac{\frac{u}{e^{n-1}}(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{u(e^n - 1)}{e^{n-1}(e - 1)}.$$

Daraus ergibt sich auf eben die Art, wie in der vorigen Aufgabe,

$$s = u\left(1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} \ldots\ldots + \frac{1}{e^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{u\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}{1 - \frac{1}{e}}.$$

Also $$u = s \cdot \frac{1 - \frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e^n}}.$$

Es sei $e = 3$, $n = 12$, $s = 1328600$, so ist

$$u = \frac{1328600(1 - \frac{1}{3})}{1 - \frac{1}{e^{12}}}$$

$$= \frac{1328600 \cdot \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{531441}}$$

$$= \frac{1328600 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{531440}{531441}}$$

$$= \frac{1328600 \cdot 2 \cdot 531441}{531440 \cdot 3}$$

$$= 5 \cdot 177147 = 885735.$$

Daraus ergibt sich denn

$$a = \frac{u}{e^{n-1}} = \frac{885735}{3^{11}} = \frac{885735}{177147} = 5.$$

Neunte Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression ist der Exponent e, das letzte Glied u und die Summe der Glieder s gegeben; man sucht das erste Glied a und die Anzahl der Glieder n.

Es ist $u = ae^{n-1}$,

also $\frac{ue}{a} = e^n$.

Ferner ist $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$.

Setzt man statt e^n den Werth, so kommt

$$s = \frac{\frac{aue}{a} - a}{e - 1},$$

Also $s(e-1) = ue - a$,
oder $se - s = ue - a$,
oder $se - ue - s = -a$,
oder $s + ue - se = a$,
oder $s + e(u-s) = a$.

Folglich ist $e^n = \frac{ue}{s + e(u-s)}$,

daher $n \cdot \text{Log.}\, e = \text{Log.} \frac{ue}{s + e(u-s)}$,

folglich $n = \frac{\text{Log.} \frac{ue}{s + e(u-s)}}{\text{Log.}\, e}$.

Es sei $e = 4$, $u = 2097152$, $s = 2796200$, so ist

$a = 2796200 + 4(2097152 - 2796200)$
$= 2796200 - 2796192 = 8$.

$$n = \frac{\text{Log.} \frac{4 \cdot 2097152}{8}}{\text{Log.}\, 4}$$

$$= \frac{\text{Log.}\, 1048576}{\text{Log.}\, 4}$$

$$= \frac{6{,}0206000}{0{,}6020600} = 10.$$

Zehnte Aufgabe.

Von einer geometrischen Progression sind die Anzahl der Glieder, das letzte Glied und die Summe der Glieder gegeben; man sucht das erste Glied und den Exponenten.

Bekannt sind n, u, s, gesucht werden a und e. Es ist

$$u = ae^{n-1},$$

also $\frac{u}{e^{n-1}} = a$.

Ferner ist $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$,

Setzt man nun statt a den gefundenen Werth, so kommt

$$s = \frac{u(e^n - 1)}{e^{n-1}(e-1)},$$

oder

$$s = \frac{u(e^n - 1)}{e^n - e^{n-1}},$$

also $se^n - se^{n-1} = ue^n - u,$

oder $se^n - ue^n - se^{n-1} = -u,$

oder $e^n(s-u) - se^{n-1} = -u,$

oder $e^n - e^{n-1}\frac{s}{s-u} = -\frac{u}{s-u}.$

Es sei $n = 7$, $u = 93750$, $s = 117186$, so hat man die Gleichung

$$e^7 - e^6 \cdot \tfrac{117186}{117186-93750} = -\tfrac{93750}{117186-93750},$$

oder $e^7 - e^6 \cdot \frac{117186}{23436} = -\frac{93750}{23436}.$

Diese Gleichung vom siebenten Grade kann nur erst weiter unten aufgelöst werden. Setzt man statt e nach und nach die Werthe 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., so wird sich zeigen, daß $e = 5$ einen richtigen Werth gibt. Es ist alsdann $e^7 = 78125$ und $e^6 = 15625$. Also hat man

$$78125 - \tfrac{15625 \cdot 117186}{23436} = -\tfrac{93750}{23436},$$

oder Alles auf einerlei Nenner gebracht,

$$78125 \cdot 23436 - 15625 \cdot 117186 = -93750.$$

Alles durch 15625 dividirt, kommt

$$5 \cdot 23436 - 117186 = -6,$$

oder $117180 - 117186 = -6,$

oder $-6 = -6.$

Anwendung der Lehre von geometrischen Progressionen auf die zusammengesetzte Zinsrechnung.

§. 20.

Eine Anwendung findet die Lehre von den geometrischen Progressionen bei der Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen, d. h. wenn die Zinsen nicht ausgezahlt, sondern immer wieder zum Kapitale geschlagen und somit aufs neue verzinst werden. Es können dabei vier Hauptfragen Statt finden:

1) Man will wissen, wie hoch ein Kapital in einer gegebenen Zeit anwachse, wenn die Zinsen zum Kapitale geschlagen und immer aufs neue verzinst werden.

2) Man fragt nach der ursprünglichen Größe eines Kapitals, das in einer gegebenen Zeit vermöge des bekannten Zinsfußes mit Zinseszinsen bis zu einer gewissen Größe angewachsen ist.

3) Man will wissen, zu wie viel Prozent ein gegebenes Kapital ausgeliehen worden ist, wenn es in einer gewissen Zeit durch Zinseszinsen eine gegebene Größe erreicht hat.

4) Man fragt, wie lange ein Kapital ausstehen muß, wenn es zu einem gegebenen Zinsfuße durch Zinseszinsen eine gegebene Größe erreichen soll.

Erste Aufgabe.

Ein Kapital a ist zu w Prozent verzinst worden; wie hoch wird es nach b Jahren angewachsen sein, wenn die Zinsen immer wieder zum Kapital geschlagen werden?

Auflösung.

Ist das Kapital a zu w Prozent verzinst worden, so findet man die Zinsen des ersten Jahres durch die Proportion

$$100 : w = a : x,$$

also

$$x = \frac{w}{100} . a.$$

Werden diese Zinsen zum Kapitale geschlagen, so ist dasselbe am Ende des ersten Jahres zu $a + \frac{w}{100} . a = a\left(1 + \frac{w}{100}\right) = a\left(\frac{100 + w}{100}\right)$ angewachsen.

Der Bequemlichkeit wegen wollen wir den Bruch $\frac{w}{100} = u$ setzen, dann ist $1 + \frac{w}{100}$ oder $\frac{100 + w}{100} = 1 + u$, also das angewachsene Kapital am Ende des ersten Jahres $= a(1 + u)$.

Dieses neue Kapital trägt nun im zweiten Jahre wieder Zinsen, die man durch die Proportion findet

$$100 : w = a(1 + u) : x,$$

oder

$$1 : u = a(1 + u) : x,$$

also

$$x = a(1 + u)u,$$

und daher das Kapital am Ende des zweiten Jahres

$$= a(1 + u) + a(1 + u)u$$
$$= a[(1 + u) + (1 + u)u].$$

Setzt man den gemeinschaftlichen Faktor $1 + u$ nur einmal und schreibt die ungleichen Faktoren 1 und u in eine Klammer daneben, so kommt das Kapital am Ende des zweiten Jahres

$$= a[(1 + u)(1 + u)]$$
$$= a(1 + u)^2.$$

Auf eben die Art findet man das Kapital am Ende des dritten Jahres. Es verhält sich nämlich jetzt

$$1 : u = a(1+u)^2 : x,$$

also $$x = a(1+u)^2 u,$$

daher Kapital und Zinsen $$= a(1+u)^2 + a(1+u)^2 u$$
$$= a[(1+u)^2 + (1+u)^2 u]$$
$$= a(1+u)^2(1+u)$$
$$= a(1+u)^3.$$

Eben so wird das Kapital am Ende des vierten Jahres $= a(1+u)^4$, am Ende des fünften Jahres $= a(1+u)^5$, folglich am Ende des nten Jahres $= a(1+u)^n$ gefunden werden.

Bezeichnen wir mit Q die Zahl, zu welcher das Kapital am Ende eines beliebigen Jahres, also im Allgemeinen des nten Jahres angewachsen ist, so hat man durchgängig die Gleichung

$$Q = a(1+u)^n.$$

Die Größe u läßt sich immer als Dezimalbruch berechnen. Ist z. B. $w = 4,\ 4\frac{1}{2},\ 5,\ 5\frac{3}{4},\ 3\frac{7}{8}$, so ist

$$u = \frac{w}{100} = 0{,}04;\ 0{,}045;\ 0{,}05;\ 0{,}0575;\ 0{,}03875;$$

folglich $$1+u = 1{,}04;\ 1{,}045;\ 1{,}05;\ 1{,}0575;\ 1{,}03875.$$

Erstes Exempel.

Ein Kapital von 10000 thlr. wird zu 4 Prozent ausgeliehen und die Zinsen werden jährlich zum Kapital geschlagen; wie hoch wird es am Ende des zwölften Jahres angewachsen sein?

Hier ist $Q = 1{,}04^{12} \cdot 10000$.

Man muß also die Zahl 1,04 auf die zwölfte Potenz erheben, und diese mit 10000 multipliziren.

Man könnte sich ein für alle Mal Tafeln von den Potenzen von $1+u$ verfertigen, indem man für u die gewöhnlichsten Prozente setzt. Dann hat man bei jeder Rechnung nur nöthig, die verlangte Potenz von $1+u$ aufzuschlagen und die gefundene Zahl mit dem gegebenen Kapitale zu multipliziren.

Außerdem ist die Rechnung mit Logarithmen die bequemste. Es ist nämlich

$$\text{Log. } Q = \text{Log. } [a(1+u)^n],$$

also $$\text{Log } Q = \text{Log. } a + n \,.\, \text{Log. } (1+u).$$

Im Exempel ist daher

$$\text{Log. } Q = \text{Log. } 10000 + 12 \,.\, \text{Log. } 1{,}04.$$

Es ist	Log. 1,04 =	0,0170333,
multiplizirt mit 12, kommt		0,2043996,
addirt	Log. 10000 =	4,0000000
kommt	Log. Q =	4,2043996.

Schlägt man diese Zahl in den Tafeln auf, so findet man den nächsten Logarithmen = 4,2043913 und dazu die Zahl 16010. Der Unterschied vom gegebenen Logarithmen ist 83, wozu der Proportionaltheil 0,307 gehört. Also ist

$$Q = 16010{,}307,$$

d. h. das Kapital ist am Ende des zwölften Jahres zu 16010 thlr. 7 gr. 4 pf. angewachsen.

Schreibt man die Größen, zu denen das Kapital am Ende jedes Jahres anwächst, neben oder unter einander, so entsteht eine geometrische Progression, deren erstes Glied das ursprüngliche Kapital, der Exponent $= 1+u$, die Zahl der Glieder aber der Zahl der Jahre gleich ist. Man sucht in dieser Progression aber nicht die Summe, sondern das letzte Glied nach der Formel bei den Progressionen $u = ae^{n-1}$. Da aber die Größe dieses Gliedes immer nur am Ende des laufenden nten, oder am Anfange des $(n+1)$ten Jahres Statt findet, so wird der Exponent $n-1$ in den $n+1-1 = n$ verwandelt, und es ist $u = ae^n$. Die Progression ist folgende:

Jahre.	Glieder am Anfange des Jahres.	Letzte Glieder am Ende jedes Jahres.
1	a	$a(1+u)$
2	$a(1+u)$	$a(1+u)^2$
3	$a(1+u)^2$	$a(1+u)^3$
4	$a(1+u)^3$	$a(1+u)^4$
5	$a(1+u)^4$	$a(1+u)^5$
⋮	⋮	⋮
n	$a(1+u)^{n-1}$	$a(1+u)^n$.

Die obige Regel, den Logarithmen von Q zu finden, läßt sich in Worten so ausdrücken: Man bestimme erst die Zahl $1+u$, indem man die gegebenen Prozente zu 100 addirt und die Summe durch 100 dividirt. Den Logarithmen des Quotienten nehme man so vielmal, als die Zahl der Jahre beträgt und addire zum Produkte den Logarithmen des ursprünglichen Kapitals, so ist die Summe der Logarithme von Q, und Q selbst wird nun durch die Tafeln bestimmt.

Zweites Exempel.

Ein Vater legt bei der Geburt seines Sohnes ein Kapital von 1000 thlr. an und schlägt die Zinsen immer wieder zum Kapitale; wie hoch wird es nach 30 Jahren angewachsen sein, wenn 5 Prozent Zinsen gerechnet werden?

Es ist $1+u = \frac{100}{100}+\frac{5}{100} = \frac{105}{100} = 1{,}05$. Also

	Log. 1,05	= 0,0211893,
multiplizirt mit 30, kommt		0,6356790,
dazu addirt	Log. 1000	= 3,0000000,
kommt	Log. Q	= 3,6356790.
Nun ist	Log 4321,9	= 3,6356747.
	Unterschied	= 43.

Dazu gehört der Proportionaltheil 0,043, also ist

$Q = 4321{,}943 = 4321$ thlr. 22 gr. 7 pf.

Zweite Aufgabe.

Wie groß ist das ursprüngliche Kapital, das in n Jahren zu einer Größe $= Q$ angewachsen ist, wenn w Prozent Zinsen gerechnet und die Zinsen zum Kapitale geschlagen werden?

In diesem Falle wird a gesucht, das übrige ist gegeben.

Es ist $Q = a(1+u)^n$,

also $\frac{Q}{(1+u)^n} = a$.

Vermittelst der Logarithmen hat man

$$\text{Log. } a = \text{Log. } Q - n \,.\, \text{Log. } (1+u).$$

Exempel.

Wie groß ist ein Kapital, das zu 5 Prozent in 50 Jahren auf 114674 thlr. angewachsen ist, weil die Zinsen dazu geschlagen wurden?

Hier ist $Q = 114674$, $n = 50$, $1+u = \frac{105}{100} = 1{,}05$.

Also	Log. 1,05	= 0,0211893,
multiplizirt mit 50, kommt		1,0594650.

Dieses abgezogen von Log. 114674 $= 5{,}0594650$, bleibt 4,0000000, und dazu gehört die Zahl 10000 thlr.

Dritte Aufgabe.

Ein Kapital a, das zu w Prozent verzinst ist und zu dem jedes Jahr die Zinsen geschlagen werden, wächst zur Größe Q an, wie lange hat dasselbe ausgestanden?

Bekannt sind a, Q, $1+u$, gesucht wird n. Es ist

$$Q = a(1+u)^n,$$

also $$\text{Log. } Q = \text{Log. } a + n \cdot \text{Log. } (1+u),$$

oder $$\text{Log. } Q - \text{Log. } a = n \cdot \text{Log. } (1+u),$$

daher $$\frac{\text{Log. } Q - \text{Log. } a}{\text{Log. } (1+u)} = n.$$

Exempel.

Wie lange müssen 20000 thlr. stehen, um zu $4\frac{1}{2}$ Prozent, wenn Zinseszinsen gerechnet werden, zu $116327\frac{2}{3}$ thlr. anzuwachsen?

Es ist $a = 20000$, $Q = 116327\frac{2}{3} = 116327{,}4$ und $1+u = 1{,}045$.

Rechnung.

$$\text{Log. } Q = 5{,}0656821,$$

abgezogen $$\text{Log. } a = 4{,}3010300,$$

$$0{,}7646521.$$

Ferner ist $\text{Log. } 1{,}045 = 0{,}0191163$. Also

$$n = \frac{0{,}7646521}{0{,}0191163} = 40.$$

Die Division giebt freilich nur beinahe 40, dies kommt aber daher, daß die Logarithmen in den Tafeln nicht vollständig gefunden werden.

Man kann auch fragen, wie lange das Kapital stehen müsse, um zweimal, dreimal, viermal, überhaupt um m mal so groß zu werden, als das ursprüngliche. Es sei daher folgende allgemeine Aufgabe gegeben.

In wie viel Zeit wächst ein Kapital a zu dem m fachen Werthe an, wenn es zu w Prozent verzinst ist und Zinseszinsen gerechnet werden?

Es ist folglich $Q = ma$, also

$$ma = a(1+u)^n.$$

Da man auf beiden Seiten mit a dividiren kann, so kommt

$$m = (1+u)^n,$$

also $$\text{Log. } m = n \cdot \text{Log. } (1+u),$$

folglich $$\frac{\text{Log. } m}{\text{Log. } (1+u)} = n.$$

In diesem Falle kommt es also auf die Größe des Kapitals gar nicht an, sondern man braucht nur den Logarithmen der Zahl, welche angibt, wie vielmal das Kapital vergrößert werden soll, durch den Logarithmen von $1+u$ zu dividiren, um die Zahl der Jahre zu finden.

Exempel.

Wie lange muß ein Kapital von 10000 thlr. stehen, um zu 5 Prozent, Zinseszinsen gerechnet, auf das Doppelte anzuwachsen?

Hier ist $m = 2$. Also

$$\frac{\text{Log } 2}{\text{Log. } 1{,}05} = n,$$

$$\text{Log. } 2 = 0{,}3010300,$$

$$\text{Log } 1{,}05 = 0{,}0211893.$$

Dividirt man mit der letztern Zahl in die erstere, so kommt 14,2067. Das Kapital muß also 14 Jahre und noch $\frac{2067}{10000}$ Jahr oder 14 Jahre und beinahe $75\frac{1}{2}$ Tag stehen, um zu 20000 thlr. anzuwachsen.

So wie hier n nicht in ganzen Zahlen kommt, so kann es auch als Bruch gegeben werden. Davon nachher.

Vierte Aufgabe.

Ein Kapital a wächst in n Jahren vermittelst Zinseszinsen zu der Größe Q an; zu wie viel Prozent ist es verzinst worden?

Bekannt sind a, Q, n, gesucht wird w oder zuerst u.

Es ist $Q = a(1+u)^n$,

also $\frac{Q}{a} = (1+u)^n$,

folglich $\text{Log.}\frac{Q}{a} = n \cdot \text{Log.}(1+u)$,

oder $\text{Log. } Q - \text{Log. } a = n \cdot \text{Log.}(1+u)$,

daher $\frac{\text{Log. } Q - \text{Log. } a}{n} = \text{Log.}(1+u)$.

Hat man so den Logarithmen von $1+u$, also auch $1+u$ selbst gefunden, so ziehe man 1 ab, um u zu bekommen, und da $u = \frac{w}{100}$ ist, so ist $100u = w$.

Exempel.

Ein Kapital von 15000 thlr. wächst in 32 Jahren vermittelst Zinseszinsen zu $66224\frac{3}{5}$ thlr. an; zu wie viel Prozent ist es verzinst worden?

Es ist $Q = 66224\frac{3}{5} = 66224{,}6$, $a = 15000$, $n = 32$.

Also	Log. 66224,6	= 4,8210193,
abgezogen	Log. 15000	= 4,1760913,
bleibt		0,6449280.

Dividirt

Dividirt man in diese Zahl mit 32, so kömmt 0,0201540 = Log. (1+u), also 1+u = 1,0475, daher u = 0,0475; dies mit 100 multiplizirt, gibt w = $4\frac{75}{100}$ = $4\frac{3}{4}$ Prozent.

§. 21.

Wenn von den jährlichen Zinsen die Hälfte alle halbe, das Viertel alle Vierteljahre, überhaupt der mte Theil in jedem mten Theile des Jahres bezahlt wird, so ist die Zahl der Termine gleich der Zahl der Jahre, multiplizirt mit der in einem Jahre enthaltenen Termine. Ist die Zahl der Jahre = n, so ist die Zahl der Termine für halbjährliche Zinsen = 2n, für vierteljährliche = 4n, für mteljährliche = mn. Ist der jährliche Zinsfuß für das Kapital 1 = u, so zahlt man im ersten halben Jahre $\frac{u}{2}$, im ersten Vierteljahre $\frac{u}{4}$, im ersten mtel-Jahr $\frac{u}{m}$ Zinsen. Das Kapital ist also am Ende des ersten halben Jahres zu $1+\frac{u}{2}$, am Ende des ersten Vierteljahres zu $1+\frac{u}{4}$, am Ende des ersten mtel-Jahres zu $1+\frac{u}{m}$ angewachsen. Dies wächst nun im zweiten halben, viertel, mtel-Jahre zu $\left(1+\frac{u}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{u}{4}\right)^2$, $\left(1+\frac{u}{m}\right)^2$; im dritten zu $\left(1+\frac{u}{2}\right)^3$, $\left(1+\frac{u}{4}\right)^3$, $\left(1+\frac{u}{m}\right)^3$ u. s. w., also überhaupt, wenn n die Zahl der ganzen Jahre, welche das Kapital ausstehet, und m die Zahl der Termine in Einem Jahre bedeutet, zu $\left(1+\frac{u}{m}\right)^{nm}$. Ist daher das ursprüngliche Kapital = a, so wird es zu $a\left(1+\frac{u}{m}\right)^{nm} = Q$.

Dies Anwachsen ist aber stärker, als es nach dem jährlichen Zinsfuß = u sein müßte, wenn man Zinsen von Zinsen rechnet. Denn wenn das Kapital 1 in einem Jahre zu 1+u anwachsen soll, so kann es im mten Theile des Jahres nicht zu $1+\frac{u}{m}$ steigen, weil, wenn die Zinsen für $\frac{1}{m}$ Jahr = $\frac{u}{m}$ berechnet werden, das Kapital dadurch am Ende des Jahres zu $\left(1+\frac{u}{m}\right)^m$ anwächst, welches nicht = 1+u ist. Es sei m = 2, d. h. man berechne den Anwachs des Kapitals nach halbjährlichen Terminen, so ist am Ende des zweiten halben, also am Ende des ganzen Jahres das Kapital zu $\left(1+\frac{u}{2}\right)^2$

gewerden. Dies setzt aber einen andern Zinsfuß, als u voraus. Man findet nämlich den Zinsfuß, wenn man von $\left(1+\frac{u}{2}\right)^2$ das Kapital 1 abzieht. Nun ist $\left(1+\frac{u}{2}\right)^2 = 1+u+\frac{u^2}{4}$, also der Zinsfuß $= 1+u+\frac{u^2}{4}-1 = u+\frac{u^2}{4}$, da er doch nur u sein sollte. Eben so, wenn der $\frac{1}{m}$ jährliche Zins $= \frac{u}{m}$, so ist das Kapital am Ende des Jahres zu $\left(1+\frac{u}{m}\right)^m$ angewachsen, also der jährliche Zins $= \left(1+\frac{u}{m}\right)^m - 1$, da er ebenfalls nur u sein müßte.

Wie groß wird also der halbjährliche Zins sein, wenn der jährliche $= u$ bleiben soll? Es sei der gesuchte halbjährliche Zins $= x$, so ist das Kapital am Ende des ersten halben Jahres zu $1+x$ und am Ende des zweiten zu $(1+x)^2$ angewachsen. Da nun x so beschaffen sein soll, daß der jährliche Zinsfuß u nicht verändert wird und bei jährlichen Terminen das Kapital am Ende des Jahres $= 1+u$ ist, so muß $(1+x)^2 = 1+u$, also $1+x = \sqrt{(1+u)}$, folglich $x = \sqrt{(1+u)}-1$ oder $(1+u)^{\frac{1}{2}}-1$ sein. Auf eben die Art erhellet auch, daß, wenn man statt des halben Jahres $\frac{1}{m}$ Jahr setzt, der $\frac{1}{m}$ jährliche Zinsfuß, wenn das Kapital am Ende des Jahres nur zu $1+u$ wachsen soll, $= \sqrt[m]{(1+u)}-1 = (1+u)^{\frac{1}{m}}-1$ sein müsse.

Setzen wir $m = 4$, so ist der vierteljährliche Zinsfuß x, wenn man den jährlichen u zu 5 Prozent setzt, vom Kapital 1 nicht $= \frac{0{,}05}{4} = 0{,}0125$, sondern $= \sqrt[4]{(1{,}05)}-1 = 1{,}012272-1 = 0{,}012272$, und dieser ist um 0,000228 kleiner, als 0,0125.

Bei bedeutenden Kapitalen macht dies allerdings schon einen beträchtlichen Unterschied. Z. B. Ein Kapital von 10000 thlr. ist zu 5 Prozent verzinst und die Zinsen werden alle Vierteljahre zum Kapitale geschlagen; wie hoch wächst es in 20 Jahren an, wenn der Zinsfuß vierteljährlich zu $\frac{0{,}05}{4}$ gerechnet wird?

Es ist alsdann

$$Q = a\left(1+\frac{u}{n}\right)^{mn} = 10000\left(1+\frac{0{,}05}{4}\right)^{80}$$
$$= 10000 \cdot 1{,}0125^{80}.$$

Es ist Log. 10000 = 4,0000000,
80. Log. 1,0125 = 0,4316000,
4,4316000.

Dazu gehört die Zahl 27014,68. So hoch wäre also das Kapital angewachsen.

Soll aber der vierteljährliche Zinsfuß so eingerichtet sein, daß er wirklich im Jahre nur 5 Prozent beträgt, oder daß das Kapital 1 nach 4 Vierteljahren nur zu 1,05 anwächst, so ist $1+x = \sqrt[4]{(1+u)} = \sqrt[4]{1,05}$, und also das nach 20 Jahren angewachsene Kapital, wenn es ursprünglich = 10000 thlr. war, $= 10000(\sqrt[4]{1,05})^{80} = 10000(1,05^{\frac{1}{4}})^{80} = 10000 \cdot 1,05^{20}$.

Also 20. Log. 1,05 = 0,4237860,
Log. 10000 = 4,0000000,
4,4237860.

Dazu gehört die Zahl 26532,98 thlr. und der Unterschied von der vorigen Summe ist = 481,72 thlr.

Man muß sich also wohl gegenseitig verständigen, wie die 5 Prozent jährlicher Zinsen gemeint sind.

Nach diesen Grundsätzen berechnet man auch den Anwachs eines Kapitals, wenn es einige ganze Jahre und noch einen Theil des Jahres steht. Es sei also ein Kapital von 8000 thlr. zu 4 Prozent ausgeliehen und stehe 18 Jahre $7\frac{1}{2}$ Monat; bis zu welcher Größe ist es angewachsen?

Die 18 Jahre $7\frac{1}{2}$ Monat betragen 447 halbe Monat. Nach dem ersten Verfahren betrügen die 4 Prozent Zinsen im halben Monat $\frac{4}{24}$ von 100 oder $\frac{u}{n}$ wäre $= \frac{0,04}{24} = 0,0016666$, also $1+\frac{u}{n} = 1,0016666$. Es ist daher das angewachsene Kapital $= 8000 \cdot 1,0016666^{447}$. Nun ist

447. Log. 1,0016666 = 0,3231810,
Log. 8000 = 3,9030900,
4,2262710.

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 16837,2 thlr.

Rechnet man auf die andere Art, so wächst ein Kapital 1, das in einem Jahre auf 1,04 anwächst, in einem halben Monat auf $\sqrt[24]{1,04}$, und also in 447 halben Monaten auf $(\sqrt[24]{1,04})^{447}$ oder auf $(1,04^{\frac{1}{24}})^{447}$, also auf $1,04^{\frac{447}{24}}$ an. Dieses mit 8000 multiplizirt, gibt den Anwachs der 8000 thlr.

Es ist $\frac{447}{24}$. Log. 1,04 = 0,3172452,
Log. 8000 = 3,9030900,
4,2203352.

Die dazu gehörige Zahl ist 16608,68 thlr. Der Unterschied von der vorigen Rechnung ist 228,5 thlr.

Man kann auch gleich nach der Formel $Q = a(1+u)^n$ rechnen. Alsdann ist n = 18 Jahr $7\frac{1}{2}$ Monat = $18\frac{15}{24}$ oder $18\frac{5}{8}$ oder 18,625 Jahr, also

$$Q = a(1+u)^{18,625},$$

folglich Log. Q = 18,625. Log. 1,04 + Log. 8000.

Die Rechnung kommt ganz dieselbe, da $18,625 = \frac{447}{24}$ ist.

Noch folgendes Beispiel.

Wie groß ist das ursprüngliche Kapital, das, zu 5 Prozent und Zinseszinsen gerechnet, in 188 Jahren $9\frac{5}{17}$ Monat bis zu 1 Million Thaler anwächst?

Es ist $9\frac{5}{17}$ Monat = $\frac{79}{102}$ Jahr, also $n = 188\frac{79}{102} = \frac{19255}{102}$ Jahr. Daher

Log. a = Log. 1000000 — $\frac{19255}{102}$. Log. 1,05.

Die Rechnung gibt $\frac{19255}{102}$. Log. 1,05 ziemlich genau = 4,0000000, also Log. 1000000 = 6,0000000,

$\frac{19255}{102}$. Log. 1,05 = 4,0000000,

Log. a = 2,0000000.

Dies gibt a = 100. Das Kapital 100 wird also in der angegebenen Zeit auf 1000000 thlr. anwachsen.

Die vorigen Exempel, z. B. das vorletzte, könnte man auch so berechnen. Man suche erst, wie hoch die 8000 thlr. in 18 Jahren anwachsen. Alsdann ist das angewachsene Kapital $Q = 8000 . 1,04^{18}$. Nun ist

Log. 8000 = 3,9030900,
18. Log. 1,04 = 0,3065994,
4,2096894.

Dazu gehört die Zahl 16206,5 thlr.

Dieses Kapital wächst nun noch durch die Zinsen, welche es zu 4 Prozent in $7\frac{1}{2}$ Monaten trägt. Diesen Zuwachs findet man durch den Aufsatz:

100 thlr. : 4 thlr. = 16206,5 thlr. : x.
in 12 M. in $7\frac{1}{2}$ M.

Es kommt x = 405,16 thlr. Dies zu 16206,5 addirt, gibt 16611,66, welches von 16608,68 thlr. wenig abweicht. Der kleine Unterschied kommt daher, daß das Kapital 1 in $7\frac{1}{2}$ Monat nicht zu $1 . \frac{0,04 . 7\frac{1}{2}}{12}$, sondern zu $1 . \sqrt[24]{1,04^{15}}$ anwächst.

§. 22.

In diesem Falle, wo man nach der Bemerkung S. 157. bloß das letzte Glied einer geometrischen Progression zu suchen hat, kann n, oder die Zahl der Jahre, wohl als Bruch gegeben sein. Aber wir werden weiter unten Fälle bekommen, wo das Resultat durch Summirung einer geometrischen Progression erhalten wird; in diesem Falle darf die Zahl der Jahre keinen Bruch enthalten, weil sonst die Summe der Progression unrichtig kommt. Es hat schon an und für sich keinen Sinn, die Zahl der Glieder einer geometrischen Progression sich als Bruch zu denken, aber die Unrichtigkeit läßt sich auch mathematisch beweisen. Ist der Potenzexponent im letzten Gliede der Progression $= n$, so ist die Anzahl der Glieder $= n+1$. Setzen wir nun n gleich einer ganzen Zahl und einem Bruche, also $= m+\frac{p}{q}$, wo $\frac{p}{q}$ ein eigentlicher Bruch ist, so wäre, wenn wir den Exponenten der Progression $= e$ und das erste Glied $= 1$ setzen, die Reihe folgende:

$$1+e+e^2+e^3+e^4+e^5+\ldots\ldots+e^m+e^{m+\frac{p}{q}}.$$

Drücken wir die Summe dieser Reihe durch S aus, so wäre nach der Formel für die Summe der Progression

$$S=\frac{e^{n+1}-1}{e-1}=\frac{e^{m+\frac{p}{q}+1}-1}{e-1}.$$

Nun sei die Summe der Reihe von 1 bis $e^m = R$, so ist

$$R=\frac{e^{m+1}-1}{e-1}.$$

Addirt man dazu noch das weggelassene Glied $e^{m+\frac{p}{q}}$, so müßte auch S herauskommen, folglich

$$S=\frac{e^{m+1}-1}{e-1}+e^{m+\frac{p}{q}}.$$

Diesem Werthe müßte nun der obige für S gleich sein, wenn derselbe ganz richtig wäre. Es wäre also

$$\frac{e^{m+\frac{p}{q}+1}-1}{e-1}=\frac{e^{m+1}-1}{e-1}+e^{m+\frac{p}{q}}.$$

Bringt man rechts unter einerlei Nenner, so kommt

$$\frac{e^{m+\frac{p}{q}+1}-1}{e-1}=\frac{e^{m+1}-1}{e-1}+\frac{e^{m+\frac{p}{q}+1}-e^{m+\frac{p}{q}}}{e-1}.$$

Da nun überall die Nenner gleich sind, so sind auch die Zähler gleich, also

$$e^{m+\frac{p}{q}+1}-1 = e^{m+1}-1+e^{m+\frac{p}{q}+1}-e^{m+\frac{p}{q}}.$$

Auf beiden Seiten hebt sich $e^{m+\frac{p}{q}+1}$ und -1, also kommt

$$0 = e^{m+1}-e^{m+\frac{p}{q}},$$

welches aber offenbar nicht möglich ist, da sonst $e^{m+1} = e^{m+\frac{p}{q}}$, also $1 = \frac{p}{q}$ sein müßte, gegen die Voraussetzung, daß $\frac{p}{q}$ ein eigentlicher Bruch sein soll. Bei der Formel für die Summirung wird nämlich immer angenommen, daß der Exponent der Progression mit jedem ganzen Gliede auch um einen ganzen Grad wächst; ist aber der Exponent des letzten Gliedes oder n ein Bruch, so wächst die Potenz nicht um einen ganzen Grad, daher die Formel nicht richtig kommen kann. Wir wollen dies noch durch ein Beispiel in Zahlen erläutern. Es sei $e = 3$, $n = 5\frac{1}{2}$, also $m = 5$ und $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, so ist die Reihe

$$1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^{5\frac{1}{2}}.$$

Diese Reihe ist nur bis 3^5 eine richtige Progression, denn sollte das sechste Glied $3^{5\frac{1}{2}}$ auch in die Reihe passen, so müßte es 3^6 heißen. Es kann daher die Formel für die Summirung der Progression nur bis 3^5 strenge richtig sein, nicht aber für die ganze Reihe. Die Summe von 1 bis 3^5 ist $= \frac{3^6-1}{3-1} = \frac{729-1}{2} = 364$, die Summe der ganzen Reihe also $= 364+3^{5\frac{1}{2}} = 364+3^5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 364+3^5\sqrt{3} = 364+243\sqrt{3} = 364+243 \cdot 1{,}732 = 364+420{,}876 = 784{,}876$.

Wollte man nun S nach der Summirungsformel berechnen, so wäre

$$S = \frac{3^{5\frac{1}{2}+1}-1}{3-1} = \frac{3^5 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1 - 1}{2} = \frac{3^6 \cdot \sqrt{3}-1}{2}$$
$$= \frac{729 \cdot 1{,}732-1}{2} = \frac{1262{,}628-1}{2} = \frac{1261{,}628}{2}$$
$$= 630{,}814,$$

ein Werth, der von dem vorigen sehr bedeutend abweicht und die Unrichtigkeit der Formel für diesen Fall zeigt. Nur in dem Falle würde sie etwas Richtiges geben, wenn die Progression

nach halben Potenzen von e geordnet wäre, also, wenn man zwischen den gegebenen mittlere Proportionalglieder interpolirte. Dann wäre die Progression

$$1+e^{\frac{1}{2}}+e^{1}+e^{1\frac{1}{2}}+e^{2}+e^{2\frac{1}{2}}+e^{3}+e^{3\frac{1}{2}}+e^{4}+e^{4\frac{1}{2}}+e^{5}+e^{5\frac{1}{2}},$$

oder in Zahlen

$$1+3^{\frac{1}{2}}+3^{1}+3^{1\frac{1}{2}}+3^{2}+3^{2\frac{1}{2}}+3^{3}+3^{3\frac{1}{2}}+3^{4}+3^{4\frac{1}{2}}+3^{5}+3^{5\frac{1}{2}}.$$

Denn jetzt ist die Summe ganz richtig

$$= \frac{3^{6\frac{1}{2}}-1}{2} = \frac{3^{6}\sqrt{3}-1}{2} = 630{,}814.$$

Aber dann hat man auch andere Glieder addirt, als in der Reihe $1, 3, 3^{2}, 3^{3}, 3^{4}, 3^{5}, 3^{5\frac{1}{2}}$.

Wenn man in dem letzten der obigen Exempel das Kapital a, das in 188 Jahren $9\frac{5}{7}$ Monat oder in $188\frac{79}{102}$ oder in $\frac{19255}{102}$ Jahren zu einer Million anwächst, nach der Formel $a = \frac{1000000}{1{,}05^{\frac{19255}{102}}}$ berechnet, so sucht man auch das letzte Glied einer geometrischen Progression, bei der die Anzahl der Glieder nicht nach ganzen Jahren, sondern nach Theilen des Jahres bestimmt wird, und deren Exponent das am Ende von $\frac{1}{102}$ Jahr angewachsene Kapital 1 ist. Zu 5 Prozent wächst nämlich das Kapital 1 am Ende des ersten Jahres zu 1,05 an, also, wenn dieser Zinsfuß beibehalten wird, nach $\frac{1}{102}$ Jahr zu $1{,}05^{\frac{1}{102}}$ oder zu 1,0004783, nach $\frac{2}{102}$ Jahr zu $1{,}05^{\frac{2}{102}}$ u. s. w. In der angegebenen Zeit gibt es 19255 solcher Theile, die Progression hat also auch so viel Glieder und das Kapital 1 ist am Anfange jedes dieser Termine so groß, als es folgende Reihe darstellt:

1 2 3 102 103 19255

$1;\ 1{,}05^{\frac{1}{102}};\ 1{,}05^{\frac{2}{102}} \ldots 1{,}05^{\frac{102}{102}};\ 1{,}05^{\frac{103}{102}} \ldots 1{,}05^{\frac{19255}{102}}.$

Im letzten Termine ist daher das Kapital a zu $a.1{,}05^{\frac{19255}{102}}$ angewachsen, und da dies 1 Million betragen soll, so ist

$$a = \frac{1000000}{1{,}05^{\frac{19255}{102}}} = \frac{1000000}{1{,}0004783^{19255}} = 100.$$

Rechnet man aber die Prozente so, daß man 0,05 durch 102 dividirt, so ist das Resultat sehr abweichend. Es ist $\frac{0{,}05}{102} = 0{,}000490196$. Daher ist der Werth eines Kapitals, das in $188\frac{79}{102}$ oder $\frac{19255}{102}$ Jahren zu 1 Million angewachsen ist, am Anfange dieses Zeitraums $= \frac{1000000}{1{,}000490196^{19255}}$.

Es ist Log. 1000000 = 6,0000000,
19255 . Log. 1,000490196 = 4,0974640,
1,9025350,

wozu die Zahl 79,898 gehört. Es wachsen also nach dieser Rechnung schon 79,898 thlr. in $188\frac{79}{102}$ Jahren zu 1 Million an, weil jetzt die jährlichen Zinsen nicht zu 5, sondern 5,125 Prozent gerechnet sind.

Berechnet man, wie hoch 100 thlr. anwachsen werden, wenn sie zu 5 Prozent 188 Jahre ausstehen, so hat man

$$Q = a(1+u)^{188} = 100 . 1{,}05^{188}.$$

Nun ist Log. 100 = 2,0000000,
188 . Log. 1,05 = 3,9835884,
5,9835884.

Dazu gehört die Zahl 962916. Zieht man dies von 1 Million ab, so ist der Rest = 37084 thlr. Diese sieht man als die Zinsen an, welche 962916 thlr. noch tragen müssen, um zu 1 Million zu werden, und sucht die Zeit, in welcher dies geschieht, durch den Aufsatz:

? Monat	37084 thlr. Zinsen
962916 thlr.	100 thlr.
5 thlr. Zinsen	12 Monat.

Es kommen 9,243 oder $9\frac{26}{107}$ Monat, welches von $9\frac{1}{11}$ Monat nur um wenig abweicht.

§. 23.

Wenn man zu einem auf Zinseszinsen stehenden Kapitale jährlich noch gewisse Summen hinzufügt, die nach demselben Zinsfuße Zinseszinsen bringen, so kann man ebenfalls fragen, wie hoch nach einer gewissen Reihe von Jahren alle diese Kapitale zusammen anwachsen.

Die jährlich zugelegten Summen können entweder gleich groß oder ungleich sein.

Im letztern Falle muß man von jedem einzelnen Kapitale besonders den Anwachs berechnen und dann Alles zusammen addiren. Z. B.

Es hat jemand a thlr. auf Zinsen gegeben. Nach 1 Jahre legt er b thlr., nach 2 Jahren c thlr., nach 3 Jahren d thlr., nach 4 Jahren e thlr. zu u. s. w.; wie viel Geld kann er nach n Jahren zu w Prozent und Zinseszinsen gerechnet zurückziehen?

Offenbar steht das erste Kapital a die ganzen n Jahre und wächst mit seinen Zinseszinsen auf $a(1+u)^n$.

Das Kapital b steht nur $n-1$ Jahre und wächst also auf $b(1+u)^{n-1}$.

Das Kapital c steht nur $n-2$ Jahre und wächst auf $c(1+u)^{n-2}$.

Eben so wächst d auf $d(1+u)^{n-3}$, e auf $e(1+u)^{n-4}$, u. s. w.

Was er also nach n Jahren zurückzieht, ist

$= a(1+u)^n + b(1+u)^{n-1} + c(1+u)^{n-2} + \ldots + z(1+u)^1$.

Jedes Glied besonders ausgerechnet und die Resultate addirt, gibt das Verlangte.

Beispiel.

Es gibt jemand 1000 thlr. auf Zinsen, und fügt nach 1 Jahre 300 thlr., nach 2 Jahren 800 thlr., nach 3 Jahren 400 thlr., nach 4 Jahren 200 thlr., nach 5 Jahren 600 thlr., nach 6 Jahren 700 thlr., nach 7 Jahren 100 thlr., nach 8 Jahren 900 thlr. und nach 9 Jahren noch 1000 thlr. hinzu; wie viel wird er am Ende des 10ten Jahres zurückerhalten, wenn man durchgängig 5 Prozent und Zinseszinsen rechnet?

Hier ist $n = 10$, $w = 5$, also $u = 0{,}05$ und $a = 1000$, $b = 300$, $c = 800$, $d = 400$, $e = 200$, $f = 600$, $g = 700$, $h = 100$, $i = 900$, $k = 1000$. Setzt man die angewachsenen Kapitale nach der Reihe $= A, B, C, D, E, F, G, H, I, K$, so ist

$A = a(1+u)^n = 1000 \cdot 1{,}05^{10}$,

Log. 1000 = 3,0000000,

10. Log. 1,05 = 0,2118930,

3,2118930 = Log. A.

Also $A = 1628{,}893$.

$B = b(1+u)^{n-1} = 300 \cdot 1{,}05^9$,

Log. 300 = 2,4771213,

9. Log. 1,05 = 0,1907037,

2,6678250 = Log. B.

Also $B = 465{,}398$.

$C = c(1+u)^{n-2} = 800 \cdot 1{,}05^8$,

Log. 800 = 2,9030900,

8. Log. 1,05 = 0,1695144,

3,0726044 = Log. C.

Also $C = 1181{,}963$.

$D = c'(1+u)^{n-3} = 400 \cdot 1{,}05^7,$
Log. 400 = 2,6020600,
7 . Log. 1,05 = 0,1483251,
2,7503851 = Log. D.

Also $D = 562{,}84.$

$E = e(1+u)^{n-4} = 200 \cdot 1{,}05^6,$
Log. 200 = 2,3010300,
6 . Log. 1,05 = 0,1221358,
2,4231658 = Log. E.

Also $E = 268{,}019.$

$F = f(1+u)^{n-5} = 600 \cdot 1{,}05^5,$
Log. 600 = 2,7781513,
5 . Log. 1,05 = 0,1059465,
2,8840978 = Log. F.

Also $F = 765{,}768.$

$G = g'(1+u)^{n-6} = 700 \cdot 1{,}05^4,$
Log. 700 = 2,8450980,
4 . Log. 1,05 = 0,0847572,
2,9298552 = Log. G.

Also $G = 850{,}854.$

$H = b'(1+u)^{n-7} = 100 \cdot 1{,}05^3,$
Log. 100 = 2,0000000,
3 . Log. 1,05 = 0,0635679,
2,0635679 = Log. H.

Also $H = 115{,}762.$

$I = i'(1+u)^{n-8} = 900 \cdot 1{,}05^2,$
Log. 900 = 2,9542425,
2 . Log. 1,05 = 0,0423786,
2,9966211 = Log. I.

Also $I = 992{,}25.$

$K = k(1+u)^{n-9} = 1000 \cdot 1{,}05^1,$
Log. 1000 = 3,0000000,
Log. 1,05 = 0,0211893,
3,0211893 = Log. K.

Also $K = 1050.$

Es war also

A	= 1628,893,	F	= 765,768,
B	= 465,398,	G	= 850,854,
C	= 1181,963,	H	= 115,762,
D	= 562,84,	I	= 992,250,
E	= 268,019,	K	= 1050,000,
	4107,113,		3774,634.

Also $A+B+C+D+E = 4107{,}113$,
$F+G+H+I+K = 3774{,}634$,
folglich die ganze Summe $S = 7881{,}747$.

Am Ende des 10ten Jahres werden also 7881,747 thlr. der 7881 thlr. 17 gr. 11 pf. zurückgezahlt; die Summe aller Einlagen aber beträgt 6000 thlr.

Weit kürzer wird die Rechnung, wenn in jedem Jahre eine gleich große Summe angelegt wird.

Erste Aufgabe.

Es leihet z. B. jemand a thlr. zu w Prozent aus und vermehrt sein Kapital jährlich auch um a thlr. Wie viel wird er, Zinseszinsen gerechnet, nach n Jahren zurück erhalten?

Setzt man die ganze Summe, die er zurück erhält, $= S$, so ist

$$S = a(1+u)^n + a(1+u)^{n-1} + a(1+u)^{n-2} + a(1+u)^{n-3} \ldots + a(1+u)^1$$
$$= a\left[(1+u)^n + (1+u)^{n-1} + (1+u)^{n-2} + (1+u)^{n-3} \ldots + (1+u)^1\right].$$

Was in der Klammer steht, bildet eine geometrische Progression, deren erstes Glied, wenn man von der Rechten zur Linken rechnet, $= 1+u$, das letzte $= (1+u)^n$, der Exponent aber $= 1+u$ ist. Es ist also nach dem Obigen die Summe dieser Reihe $= \frac{(1+u)\left[(1+u)^n - 1\right]}{1+u-1} = \frac{(1+u)^{n+1} - (1+u)}{u}$

und folglich $S = \frac{a\left[(1+u)^{n+1} - (1+u)\right]}{u}$.

Exempel.

Es verleihet jemand 500 thlr. zu 4 Prozent und ist im Stande, dies Kapital jedes Jahr wieder mit 500 thlr. zu vermehren. Wenn man nun Zinseszinsen rechnet, wie viel wird er nach 30 Jahren zurück erhalten?

Es ist jetzt $a = 500$, $n = 30$, $1+u = 1{,}04$, also ist

$$S = \frac{500\left[(1{,}04^{31} - 1{,}04)\right]}{0{,}04}.$$

Es ist $\quad \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}0170333$,
also $\quad 31 \cdot \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}5280323$.
Dazu gehört die Zahl $\quad 3{,}373124$.
Davon abgezogen $\quad 1+u = 1{,}04$,
bleibt $\quad 2{,}333124$.

Sucht man zu dieser Zahl den Logarithmen, so kommt

	Log. 2,333124	= 0,3679378,
dazu addirt	Log. 500	= 2,6989700,
kommt		3,0669078,
davon abgezogen	Log. 0,04	= 0,6020600—2,
bleibt		2,4648478+2,
oder		4,4648478.

Schlägt man diesen Logarithmen in den Tafeln auf, so ist die zugehörige Zahl = 29164,046, also

S = 29164 thlr. 1 gr. 1 pf.

Was er aber nach und nach ausgeliehen hat, beträgt 30.500 = 15000 thlr..

Es können bei dieser Aufgabe wieder verschiedene Fälle vorkommen. Man kann fragen, wie eben geschehen ist, 1) nach dem angewachsenen Kapitale, 2) nach dem Kapitale, das jedes Jahr eingelegt wurde, 3) nach der Zeit, welche die gesammten Kapitale stehen, 4) nach den Prozenten, zu denen sie verzinst worden sind. Diese drei letzteren Aufgaben wollen wir noch durchgehen. Also

Zweite Aufgabe.

Es leihet jemand in jedem Jahre ein gewisses Kapital zu w Prozent aus, läßt immer Kapitale und Zinsen stehen und zieht so nach n Jahren, Zinsen von Zinsen gerechnet, die Summe S zurück; wie groß ist das Kapital, daß er jedes Jahr auf Zinsen gab?

Setzt man das gesuchte Kapital = a und $\frac{w}{100} = u$, so ist

$$S = \frac{a[(1+u)^{n+1} - (1+u)]}{u},$$

folglich $$uS = a[(1+u)^{n+1} - (1+u)],$$

also $$\frac{uS}{(1+u)^{n+1} - (1+u)} = a.$$

Exempel.

Jemand verleihet eine gewisse Summe zu 4 Prozent, fügt dann jedes Jahr eine gleich große Summe hinzu und schlägt die Zinsen immer wieder zum Kapitale. Nach 30 Jahren erhält er an Kapitalen und Zinsen die Summe von 29164 thlr. 1 gr. 1 pf. zurück; wie groß war die jedes Jahr eingelegte Summe?

Es ist $1+u = 1{,}04$ und $(1+u)^{n+1} = 1{,}04^{31}$.

Diese Zahl wird zuerst berechnet. Es ist

$31 \cdot \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}5280323.$

dazu gehört die Zahl $3{,}373124.$

davon wird abgezogen $1+u = 1{,}04.$

bleibt $2{,}333124.$

Nun war der Zähler des Bruchs $= uS = 0{,}04 \cdot 29164$ thlr. 1 gr. 1 pf. Die beigefügten 1 gr. 1 pf. verwandle man in einen Quaterbruch, so kommt $S = 29164\frac{13}{288}$ thlr., und drückt man diesen Bruch als Dezimalbruch aus, so kommt $S = 29164{,}045$. Nun rechne man mit Logarithmen. Es ist

$\text{Log. } S = \text{Log. } 29164{,}045 = 4{,}4648478,$

$\text{Log. } u = \text{Log. } 0{,}04 = 0{,}6020600-2,$

$5{,}0669078-2,$

$3{,}0669078.$

davon wird abgezogen $\text{Log. } 2{,}333124 = 0{,}3679378,$

bleibt $\text{Log. } a = 2{,}6989700.$

Sucht man nun zu diesem Logarithmen die zugehörige Zahl, so findet sich 500 als das in jedem Jahre ausgeliehene Kapital.

Dritte Aufgabe.

Es leihet jemand im ersten Jahre zu w Prozent a thlr. aus und fügt mit jedem folgenden Jahre eine gleiche Summe hinzu. Nachdem so diese Kapitale mehrere Jahre gestanden haben und die Zinsen immer wieder zum Kapitale geschlagen worden sind, erhält er als sein Eigenthum die Summe von S thlr. zurück. Es ist die Frage, wie viel Jahre bis zur Zurückzahlung verflossen?

Es ist $$S = \frac{a[(1+u)^{n+1} - (1+u)]}{u},$$

also $$uS = a[(1+u)^{n+1} - (1+u)],$$

und $$\frac{uS}{a} = (1+u)^{n+1} - (1+u),$$

oder $$\frac{uS}{a} = (1+u)[(1+u)^n - 1],$$

daher $$\frac{uS}{a(1+u)} = (1+u)^n - 1,$$

und $$\frac{uS}{a(1+u)} + 1 = (1+u)^n,$$

folglich $\text{Log.}\left(\frac{uS}{a(1+u)}+1\right) = n \cdot \text{Log.}(1+u)$,

alſo $\frac{\text{Log.}\left(\frac{uS}{a(1+u)}+1\right)}{\text{Log.}(1+u)} = n.$

Exempel.

Es leihet jemand 2000 thlr. aus zu 5 Prozent, fügt dieſem Kapitale mit jedem Jahre ein gleich großes hinzu und erhält endlich nach Verlauf mehrerer Jahre, indem die Zinſen immer wieder zum Kapitale geſchlagen wurden, die Summe von 253679 thlr. 12 gr. 6 pf. zurück. Wie lange hat das erſte Kapital ausgeſtanden?

Es iſt $S = 253679$ thlr. 12 gr. 6 pf. $= 253679\frac{25}{48}$ thlr. $= 253679{,}52$ thlr., $u = 0{,}05$, $a = 2000$.

Man berechne zuerſt den Bruch $\frac{uS}{a(1+u)}$ am bequemſten vermittelſt der Logarithmen. Es iſt

Log. u	= Log. 0,05	= 0,6989700—2,
Log. S	= Log. 253679,52	= 5,4042855,
		6,1032555—2,
oder		4,1032555,
Log. a	= Log. 2000	= 3,3010300,
Log. (1+u)	= Log. 1,05	= 0,0211893,
		3,3222193.
Nun wird von		4,1032555
abgezogen		3,3222193,

ſo iſt $\text{Log.}\frac{uS}{a(1+u)} = 0{,}7810362,$

alſo $\frac{uS}{a(1+u)} = 6{,}03999.$

Dazu wird 1 addirt, ſo kommt 7,03999, und von dieſer Zahl der Logarithme geſucht $= 0{,}8475720$. Dieſer Logarithme wird nun durch den Logarithmen von $1+u$ oder durch Log. 1,05 dividirt. Es iſt Log. $1{,}05 = 0{,}0211893$ und $\frac{0{,}8475720}{0{,}0211893} = 40.$

Alſo 40 Jahre nach der Anlegung der erſten 2000 thlr. wird die gegebene Summe bezogen.

Vierte Aufgabe.

Es gibt jemand Geld auf Zinſen, in jedem Jahre a thlr. Zu wie viel Prozent iſt es verzinſt, wenn er nach n Jahren mit Kapital und Zinſeszinſen zuſammen S thlr. zurück erhält?

Bekannt sind a, n und S, gesucht wird w oder zunächst u, weil dadurch w bestimmt wird. Es ist

$$S = \frac{a[(1+u)^{n+1} - (1+u)]}{u},$$

folglich $uS = a[(1+u)^{n+1} - (1+u)]$,

oder $uS = a(1+u)^{n+1} - a - au$,

also $uS + au - a(1+u)^{n+1} = -a$,

oder $a(1+u)^{n+1} - uS - au = a$,

folgl. $a(1+u)^{n+1} - u(S+a) = a$,

daher $(1+u)^{n+1} - u \cdot \frac{S+a}{a} = 1$.

Man setze $1+u = x$, so ist $u = x-1$. Alsdann kommt

$$x^{n+1} - (x-1) \cdot \frac{S+a}{a} = 1,$$

oder $$x^{n+1} - x \cdot \frac{S+a}{a} + \frac{S+a}{a} = 1,$$

folglich $$x^{n+1} - x \cdot \frac{S+a}{a} = 1 - \frac{S+a}{a},$$

oder $$x^{n+1} - x \cdot \frac{S+a}{a} = \frac{a-S-a}{a},$$

also $$x^{n+1} - x \cdot \frac{S+a}{a} = -\frac{S}{a}.$$

Es ist dies eine höhere Gleichung, die erst in der Folge aufgelöst werden kann. Hat man x gefunden, so wird 1 abgezogen, um u zu bestimmen, und daraus findet sich denn w.

Exempel.

Alle Jahr wird ein Kapital von 1000 thlr. ausgeliehen und nach 20 Jahren erhält man mit Zinsen und Kapital, indem die Zinsen immer wieder zum Kapitale geschlagen und verinteressirt werden, 34718 thlr. zurück; wie hoch ist der Zinsfuß gerechnet?

Es ist $a = 1000$, $S = 34718$, $n = 20$. Also hat man die Gleichung

$$x^{21} - x \cdot \tfrac{35718}{1000} = -\tfrac{34718}{1000},$$

oder $$x^{21} - x \cdot 35{,}718 = -34{,}718.$$

Probirt man nun für x wahrscheinliche Werthe, z. B. 1,02; 1,03; 1,04; 1,05 u. s. w., so wird sich finden, daß 1,05 zu der Gleichung paßt. Es ist nämlich

$$21 \cdot \text{Log. } 1{,}05 = 0{,}4449753,$$

und dazu gehört die Zahl 2,7859.

Ferner ist $\frac{S+a}{a} = 35{,}718$ und $x \cdot \frac{S+a}{a} = 37{,}5039$, folglich $x^{n+1} - x \cdot \frac{S+a}{a} = 2{,}7859 - 37{,}5039 = -34{,}718$ und gerade so viel ist auch das Glied rechter Hand, nämlich $-\frac{S}{a}$.

§. 24.

Umgekehrt kann der Fall eintreten, daß der Schuldner sich seines Kapitals und der dazu gehörigen Interessen durch terminweise Zahlungen entledigt. Es hat z. B. jemand ein Kapital S in Händen, dessen Benutzung zu Zinseszinsen gerechnet wird; er will dasselbe in n einzelnen jährlichen Terminen nebst Interessen zurückzahlen; dann ist das, was er im ersten Termine giebt, als ein Kapital zu betrachten, das der Gläubiger $n-1$ Jahre mit Zinseszinsen benutzen kann, der Werth desselben ist also, wenn a die zu zahlende Summe bedeutet, $a(1+u)^{n-1}$. Was er im zweiten Termine zurückzahlt, wird $n-2$ Jahre benutzt, sein Werth ist also $= b(1+u)^{n-2}$, oder wenn die Zahlungen immer gleiche Summen sind, auch $= a(1+u)^{n-2}$. Auf diese Art wird also eine Reihe Glieder entstehen, die zusammen eine geometrische Progression bilden und deren Summe, weil die ganze Schuld nebst Interessen dadurch getilgt werden soll, so groß sein muß als S mit seinen Zinsen. Der Werth von S ist aber $= S(1+u)^n$, weil es ohne die einzelnen Zurückzahlungen n Jahre lang benutzt worden wäre. Er hätte nach n Jahren $S(1+n)^n$ zahlen müssen, dafür hat er nach und nach gezahlt $a(1+u)^{n-1}$, $a(1+u)^{n-2}$, $a(1+u)^{n-3}$ u. s. w. Es muß also die Gleichung Statt finden

$$S(1+u)^n = a[(1+u)^{n-1} + (1+u)^{n-2} + (1+u)^{n-3} \ldots + 1].$$

Was in der Klammer steht, ist eine geometrische Progression, die von der Linken zur Rechten fällt, von der Rechten zur Linken steigt. Nehmen wir die letztere Richtung, so ist 1 das erste, $(1+u)^{n-1}$ das letzte Glied, und der Exponent $= 1+u$. Da nun die Summe jeder geometrischen Progression $= \frac{a(e^n-1)}{e-1}$ war und $a = 1$, $e = 1+u$ und $n = n$ ist, so ist $a(e^n-1) = (1+u)^n - 1$ und $e-1 = 1+u-1 = u$. Folglich ist die Summe derselben $= \frac{(1+u)^n-1}{u}$.

Diese

Diese Summe wird nun noch mit dem gemeinschaftlichen Faktor a, nämlich mit der in jedem Termine ausgezahlten Summe multiplizirt, und so erhält man

$$a[(1+u)^{n-1}+(1+u)^{n-2}+(1+u)^{n-3}+..+1]=\frac{a[(1+u)^n-1]}{u}.$$

Diese Summe muß nun eben so groß sein, als $S(1+u)^n$, also erhält man die Gleichung

$$S(1+u)^n=\frac{a[(1+u)^n-1]}{u},$$

in welcher man entweder a, oder S, oder n, oder u zu bestimmen suchen kann, wodurch also wieder vier verschiedene Aufgaben entstehen.

Erste Aufgabe.

Eine schuldige Summe = S soll in n jährlichen Terminen zurückgezahlt werden. Wenn man nun w Prozent und Zinseszinsen rechnet, wie viel wird in jedem Termine gegeben werden müssen?

Bekannt sind S, n, w, und folglich auch u, gesucht wird a. Die einzelnen in Terminen gezahlten Summen müssen mit ihren Zinseszinsen offenbar so viel betragen, als das ganze Kapital S mit seinen Zinseszinsen in n Jahren. Daher die Gleichung

$$S(1+u)^n=\frac{a[(1+u)^n-1]}{u},$$

also $$uS(1+u)^n=a[(1+u)^n-1],$$

folglich $$\frac{uS(1+u)^n}{(1+u)^n-1}=a.$$

Exempel.

Jemand ist nach 10 Jahren ein Kapital von 10000 thlr. mit 5 Prozent Zinsen zu zahlen schuldig; er will es aber lieber in Terminen, die er am Ende jedes Jahres zahlt, nach demselben Zinsfuße gerechnet, abtragen; wie viel muß er jedes Jahr geben?

Es ist $S=10000$, $n=10$, $u=\frac{w}{100}=0{,}05$,

also $$1+u=1{,}05,$$

daher $$a=\frac{0{,}05\cdot 10000\cdot 1{,}05^{10}}{1{,}05^{10}-1}.$$

Am bequemsten rechnet man wieder mit Logarithmen.

Es ist

Log. 0,05	= 0,6989700—2,
Log. 10000	= 4,0000000,
10 . Log. 1,05	= 0,2118930,
	4,9108630—2,
oder.	2,9108630.

Nun suche man zu 10 . Log. 1,05 = 0,2118930 die zugehörige Zahl = 1,628894 und ziehe davon 1 ab, so bleibt 0,628894. Dazu suche man den Logarithmen = 0,7985775—1, und ziehe diesen von dem Logarithmen des Zählers = 2,9108630 ab, also

Log. 0,05 . 10000 . $1{,}05^{10}$	= 2,9108630,
Log. ($1{,}05^{10}$ — 1)	= 0,7985775—1,
Log. a	= 3,1122855.

Dazu gehört die Zahl 1295,04 thlr. = 1295 thlr. — gt. 11½ pf = a. So viel muß also in jedem Jahre abgezahlt werden, wenn die Schuld mit den Zinsen in 10 Jahren getilgt werden soll.

Von der Richtigkeit dieser Rechnung kann man sich auch so überzeugen.

Die ganzen 10000 thlr. benutzt der Schuldner nur ein Jahr; zu 5 Prozent gerechnet, haben sie also am Ende des Jahres einen Werth von 10500 thlr. Davon zahlt er 1295,04 thlr. ab, also bleiben noch 9204,95 thlr., die er wieder ein Jahr lang benutzt. Ihr Werth ist daher am Ende des zweiten Jahres = 9204,95 . 1,05 = 9665,20 thlr. Fährt man so in dieser Rechnung fort, so ergibt sich folgende tabellarische Übersicht dessen, was jedes Jahr bleibt und was dieser Rest am Ende des folgenden Jahres werth ist.

Werth am Anfange des Jahres.	Anfang des Jahres.	Werth am Ende des Jahres.	Ende des Jahres.
10000	1	10500	1
9204,95	2	9665,20	2
8370,15	3	8788,66	3
7493,61	4	7868,29	4
6573,24	5	6901,90	5
5606,86	6	5887,21	6
4592,16	7	4821,77	7
3526,72	8	3703,06	8
2408,02	9	2528,42	9
1233,37	10	1295,04	10
0	11	0	11.

Die Zahlen der dritten Kolonne entstehen, wenn man die Zahlen der ersten mit 1,05 multiplizirt, und die der ersten, wenn man von den Zahlen der zweiten die jährliche Abzahlung 1295,04 thlr. abzieht.

Zweite Aufgabe.

Von einer Schuld, die jemand mit Zinseszinsen nach n Jahren zahlen hat, will sich derselbe durch jährliche Abzahlung einer Summe von a thlr. befreien. Wie viel beträgt die ganze Schuld, wenn man w Prozent rechnet?

Bekannt sind a, w, also auch u und n, gesucht wird S. Es ist

$$S(1+u)^n = a \cdot \frac{(1+u)^n - 1}{u}.$$

Dividirt man auf beiden Seiten mit $(1+u)^n$, so kommt

$$S = a \cdot \frac{(1+u)^n - 1}{u(1+u)^n}$$

$$= a \cdot \left(\frac{(1+u)^n}{u(1+u)^n} - \frac{1}{u(1+u)^n} \right)$$

$$= a \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n} \right).$$

Exempel.

Eine Summe, die jemand schuldig ist, bezahlt er in zwanzigjährlichen Terminen, jeden zu 2000 thlr.; wie groß war die Schuld, wenn man 5 Prozent und Zinseszinsen rechnet?

Es ist w = 5, also u = 0,05 und 1 + u = 1,05, n = 20, a = 2000 thlr., also

$$S = 2000 \left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}05\,(1{,}05)^{20}} \right).$$

Es ist $\frac{1}{0{,}05} = 20$,

$$\text{Log.} \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{20}} = \text{Log. } 1 - (\text{Log. } 0{,}05 + 20 \cdot \text{Log. } 1{,}05).$$

Nun ist

Log. 0,05	= 0,6989700—2,
20 . Log. 1,05	= 0,4237860,
	1,1227560—2,
oder	0,1227560—1,
Ferner ist Log. 1	= 0,0000000 = 1,0000000—1,
davon abgezogen der obige Logarithme	= 0,1227560—1,
bleibt	0,8772440.

Die dazu gehörige Zahl = 7,537791 wird von $\frac{1}{0,05} = 20$ abgezogen; es bleibt 12,462209. Nun ist

Log. 12,462209	= 1,0955950,
Log. 2000	= 3,3010300,
Log. S	= 4,3966250.

Die dazu gehörige Zahl ist 24924,42 thlr. = S. Er war also 24924 thlr. 10 gr. 1 pf. schuldig und diese Summe wird mit ihren Zinsen und Zinseszinsen in 20 Jahren bezahlt, wenn jährlich 2000 thlr. entrichtet werden.

Dritte Aufgabe.

Es ist jemand S thlr. schuldig und will diese Schuld mit ihren Zinseszinsen zu w Prozent durch jährliche Abbezahlungen, jede = a, tilgen; wie viel Jahre werden dazu nöthig sein?

Bekannt sind S, a, w, also auch u, und n wird gesucht.

Es ist $S(1+u)^n = a\left(\frac{(1+u)^n - 1}{u}\right)$.

Also $uS(1+u)^n = a[(1+u)^n - 1]$,

oder $uS(1+u)^n = a(1+u)^n - a$,

folglich $uS(1+u)^n - a(1+u)^n = -a$,

oder $(uS-a)(1+u)^n = -a$,

daher $(1+u)^n = -\frac{a}{uS-a}$,

oder $(1+u)^n = \frac{a}{a-uS}$,

folglich $\text{Log.}(1+u)^n = \text{Log.}\frac{a}{a-uS}$,

oder $n \cdot \text{Log.}(1+u) = \text{Log.}\frac{a}{a-uS}$,

also $n = \frac{\text{Log.}\frac{a}{a-uS}}{\text{Log.}(1+u)}$.

Exempel.

Es hat jemand eine Schuld von 31139 thlr. und will dieselbe mit ihren Zinsen und Zinseszinsen durch jährliche Abzahlungen von 3000 thlr. tilgen. In wie viel Jahren wird dies geschehen, wenn man den Zinsfuß zu 5 Prozent annimmt?

Es ist S = 31139 thlr., a = 3000 thlr., w = 5, also

$$u = 0{,}05.$$

Folglich ist $$n = \frac{\text{Log.}\frac{3000}{3000 - 0{,}05 \cdot 31139}}{\text{Log. } 1{,}05}.$$

Multiplizirt man 31139 mit 0,05, so kommt 1556,95. Dieses von 3000 abgezogen, gibt 1443,05. Mit dieser Zahl dividire man in 3000, welches durch Logarithmen geschehen kann. Es ist

$$\text{Log.}\frac{3000}{1443{,}05} = \text{Log. } 3000 - \text{Log. } 1443{,}05,$$

$$\text{Log. } 3000 = 3{,}4771213,$$

$$\text{Log. } 1443{,}05 = 3{,}1592678,$$

$$0{,}3178535.$$

Nun ist Log. 1,05 = 0,0211893. Mit dieser Zahl dividire man also in 0,3178535. Der Quotient ist ziemlich genau 15. Also wird die gegebene Schuld mit ihren Zinsen und Zinseszinsen in 15 Jahren getilgt, wenn jährlich 3000 thlr. bezahlt werden.

Vierte Aufgabe.

Ein Kapital S, zu dem die Zinsen geschlagen werden, wird durch jährliche Abzahlungen von a thlr. mit seinen Zinseszinsen in n Jahren abgetragen; zu wie viel Prozent ist es verzinst worden?

Bekannt sind S, a, n, gesucht wird u und dadurch w bestimmt. Es ist

$$S = \frac{a[(1+u)^n - 1]}{u(1+u)^n},$$

also $$Su(1+u)^n = a(1+u)^n - a,$$

oder $$Su(1+u)^n - a(1+u)^n = -a,$$

folglich $$u(1+u)^n - \frac{a}{S}(1+u)^n = -\frac{a}{S}.$$

Man setze $1+u = x$, so wird $u = x - 1$; also

$$(x-1)x^n - \frac{a}{S}x^n = -\frac{a}{S},$$

oder $$x^{n+1} - x^n - x^n\frac{a}{S} = -\frac{a}{S},$$

folglich $$x^{n+1} - x^n\left(1 + \frac{a}{S}\right) = -\frac{a}{S}.$$

Exempel.

Ein Kapital von 80000 thlr. wird innerhalb 20 Jahren mit seinen Zinsen und Zinseszinsen durch jährliche Abzahlungen

von 5886 thlr. 13 gr. 2 pf. abgetragen; zu wie viel Prozent ist es verzinst gewesen?

Es ist $S = 80000$, $a = 5886$ thlr. 13 gr. 2 pf. $= 5886{,}548$ thlr., $n = 20$. Also hat man die Gleichung

$$x^{21} - x^{20}\left(1 + \frac{5886{,}548}{80000}\right) = -\frac{5886{,}548}{80000},$$

oder $x^{21} - x^{20} \cdot 1{,}0735818 = -0{,}0735818.$

Setzt man jetzt für x nach und nach schickliche Werthe, z. B. $x = 1{,}02$; $1{,}03$; $1{,}04$; $1{,}05$ u. s. w., so wird bei dem Werthe $1{,}04$ die Gleichung sich aufheben. Es ist nämlich

$$1{,}04^{21} = 2{,}278763;$$
$$1{,}04^{20} = 2{,}191190;$$
$$1{,}04^{20} \cdot 1{,}0735818 = 2{,}352347.$$

Daher die Gleichung:

$$2{,}278763 - 2{,}352347 = -0{,}0735818,$$

welche ziemlich richtig herauskommt, denn wenn man 2,352347 von 2,278763 abzieht, so bleibt $-0{,}073584$. Der kleine Unterschied rührt daher, daß nicht alle Dezimalstellen genommen worden sind.

Anmerkung.

Es ist bei diesen Rechnungen nothwendig, daß die jährlichen Abzahlungen größer seien, als die jährlich gefälligen Zinsen, also a größer, als uS. Wäre beides gleich, so zahlte man nur die Zinsen ab und das Kapital bliebe unvermindert. Wäre a gar kleiner, so würden nicht einmal die Zinsen abgetragen, der Überschuß also zum Kapital geschlagen und dieses vergrößert. Auch darf in den vorstehenden Exempeln n nicht als Bruch gegeben sein oder herauskommen, vermöge §. 22.

§. 25.

Wenn jemand nach einer bestimmten Zeit eine gewisse Summe zu bezahlen verpflichtet ist, die Schuld aber jetzt gleich abtragen will, so ist es natürlich, daß der Gläubiger ihm für den Verlust, den er dadurch erleidet, daß er das Geld, welches er jetzt gleich zahlen will, hätte ausleihen und Zinsen davon ziehen können, entschädige, also weniger nimmt, als die Schuld beträgt. Dieser Abzug, den sich der Gläubiger gefallen läßt, heißt **Rabatt** oder **Diskonto** und eine nach einer bestimmten Zeit gefällige Summe auf ihren gegenwärtigen Werth bringen, heißt dieselbe **diskontiren**.

Es ist z. B. jemand nach einem Jahre 1000 thlr. schuldig, ohne daß er sie zu verzinsen braucht; wie viel muß er jetzt da-

für geben, wenn man, um den Rabatt zu bestimmen, 5 Prozent Zinsen rechnet?

Man setze die Summe, welche jetzt gezahlt werden soll, $= x$, so muß dieses x so groß sein, daß es mit seinen Zinsen in einem Jahre zu 1000 thlr. anwächst. Bei 5 Prozent wächst 100 in einem Jahre zu 105, oder 1 zu 1,05, also hat man den Aufsatz: $1{,}05 : 1 = 1000 : x$.

Es kommt $x = 952\frac{5}{21}$ thlr.

Da 1000 thlr. in einem Jahre zu 5 Prozent gerade 50 thlr. Zinsen tragen, so könnte man denken, man brauche nur 50 thlr. von 1000 abzuziehen und dem Gläubiger also bloß 950 thlr. zu geben; aber dies ist falsch, denn diese 950 thlr. tragen in einem Jahre nicht 50 thlr., sondern nur $47\frac{1}{2}$ thlr. Zinsen, der Gläubiger bekommt daher nur $997\frac{1}{2}$ thlr.

Auf diese Art könnte man auch berechnen, was ein Kapital, das nach mehreren Jahren zahlbar ist, jetzt werth wäre. Es sei ein Kapital c nach m Jahren zu entrichten, wie viel ist es jetzt wetth, wenn man w Prozent rechnet?

Ist das, was man jetzt gibt, wieder $= x$, so muß also x in m Jahren zu c thlr. anwachsen. Die Prozente sind $= w$ $= \frac{w}{100} = u$ für das Kapital 1, folglich sind die Zinsen, die x in m Jahren trägt $= mux$ und das Kapital x wächst in m Jahren zu $x + mux$, welches $= c$ sein soll, also hat man die Gleichung

$$x + mux = c,$$

oder

$$x(1 + mu) = c,$$

folglich

$$x = \frac{c}{1 + mu},$$

woraus die Proportion folgt:

$$1 + mu : 1 = c : x.$$

Es sei $c = 10000$, $w = 5$, $m = 6$, so ist $u = 0{,}05$ und $mu = 6 . 0{,}05 = 0{,}3$, also

$$1 + mu = 1{,}3,$$

daher die Proportion $1{,}3 : 1 = 10000 : x$,

und

$$x = \frac{10000}{1{,}3} = 7692{,}307 \text{ thlr.}$$

Diese Summe, bei der aber die folgenden Dezimalstellen fehlen, trägt in 6 Jahren zu 5 Prozent gerade 2307,692... thlr. Zinsen, welche zu 7692,307 addirt, 9999,999, also fast ganz genau 10000 thlr. geben.

Allein, da die Zinsen des Kapitals so bedeutend sind, so könnten sie wieder ausgeliehen und davon die Zinsen benutzt

werden. Der Gläubiger wird daher das baar überkommene Geld höher nutzen können, als es ihm angerechnet ist, und folglich die Summe nach 6 Jahren zu mehr als 10000 thlr. anwachsen sehen. Schon das erste Jahr trägt ihm 384,615 thlr. Zinsen. Davon könnte er füglich 384 thlr. das zweite Jahr hindurch ausleihen und davon zu 5 Prozent noch 19,2 thlr. Zinsen ziehen, also in 5 Jahren 96 thlr. Die 384 thlr. des zweiten Jahres gäben in 4 Jahren 76,8 thlr., die 384 thlr. des dritten Jahres in 3 Jahren 57,6 thlr., die 384 thlr. des vierten Jahres in 2 Jahren 38,3 thlr. und die 384 thlr. des fünften Jahres in einem Jahre 19,2 thlr. Er hätte also auf diese Art $10000+96+76{,}8+57{,}6+38{,}3+19{,}2 = 10287{,}9$ thlr., da er doch nur 10000 thlr. hätte haben sollen. Es läßt sich auch denken, daß er die kleinen Summen, welche die Zinsen jährlich an neuen Zinsen tragen, hätte benutzen können. Daraus erhellt denn, daß die vorige Rechnung mit einfachen Zinsen bei Aufgaben der Art nicht angewendet werden kann. Soll das Diskonto richtig bestimmt werden, so kann es nur durch die Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen geschehen, und diese beruhet denn auf der zweiten Aufgabe §. 20., den ursprünglichen Werth eines Kapitals zu finden, das in n Jahren zu einer bestimmten Größe angewachsen ist.

Berechnet man darnach das obige Exempel, so ist

$$x = \frac{c}{(1+n)^m} = \frac{10000}{1{,}05^6}.$$

Also

Log. 10000	=	4,0000000,
6. Log. 1.05	=	0,1271358,
		3,8728642.

Dazu gehört die Zahl 7462,153. Es hat also der Schuldner nicht 7692, sondern nur 7462 thlr. statt der 10000 thlr. zu bezahlen.

§. 26.

Hierauf beruhet auch die Vergleichung von Geboten. Wenn nämlich auf eine Sache verschiedene Gebote geschehen, etwa das eine baar, die anderen nach gewissen Terminen, so ist es nöthig, daß der Verkäufer diese verschiedenen Gebote mit einander vergleiche, d. h. von jedem den jetzigen Werth zu bestimmen suche, um zu beurtheilen, welches das beste sei. Dies geschieht nun offenbar nach der Rechnung mit zusammengesetzten Zinsen, weil diese die möglichst größte Benutzung des Geldes angibt.

Es geschehen z. B. auf ein Haus drei Gebote: A will sogleich 9000 thlr. baar geben; B 10000 thlr. und zwar 2000 thlr. baar, und die übrigen 8000 thlr. in vier Terminen am Ende des ersten, zweiten, dritten und vierten Jahres, jedesmal 2000 thlr., aber ohne inzwischen Zinsen zu rechnen; C verspricht 12000 thlr., aber nur 1000 thlr. baar, dann 3000 thlr. nach drei Jahren und die übrigen 8000 thlr. auch in vier Terminen am Ende des vierten, fünften, sechsten, siebenten Jahres, jedesmal 2000 thlr. Es sollen ebenfalls keine Zinsen für den Verzug gerechnet werden. Wenn nun der Zinsfuß zu 5 Prozent angenommen wird, welches Gebot ist das beste?

Die Frage wird unstreitig beantwortet, wenn man jedes Gebot auf den gegenwärtigen Werth bringt.

Dieser Werth ist bei dem ersten Gebote selbst 9000 thlr.

Bei dem zweiten muß man 8000 thlr., welche in 4 Jahren jedesmal mit 2000 thlr. abgetragen werden, auf den jetzigen Werth bringen. Es ist also der Fall §. 24. zweite Aufgabe, und daher

$$S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right).$$

Nun ist $a = 2000$, $u = 0{,}05$ und $n = 4$. Dies gibt folgende Rechnung

Log. 0,05	= 0,6989700—2,
4 . Log. 1,05	= 0,0847572,
	0,7837272—2,
Dieser Logarithme abgezogen a . Log. 1	= 1,0000000—1,
	0,2162728+1,
oder	1,2162728.

Die dazu gehörige Zahl ist 16,454. Zieht man diese von $\frac{1}{0{,}05} = 20$ ab, so bleibt 3,545; dies mit 2000 multiplizirt, gibt 7090 thlr., also ist der baare Werth des Gebots = 9090 thlr.

Bei dem dritten Gebote ist der gegenwärtige Werth von 11000 thlr. zu berechnen, und zwar zuerst der Werth der nach drei Jahren zahlbaren 3000 thlr. Dies geschieht durch die Formel $a = \frac{Q}{(1+u)^n}$, wo $Q = 3000$, $1+u = 1{,}05$ und $n = 3$ ist. Das gesuchte a ist also $= \frac{3000}{1{,}05^3}$. Es ist

Log. 3000	= 3,4771213,
3 . Log. 1,08	= 0,0635679,
Log. a	= 3,4135534.

Die zugehörige Zahl 2591,51 gibt den baaren Werth der 3000 thlr.

Nun zahlt er am Ende des vierten, fünften, sechsten, siebenten Jahres jedesmal noch 2000 thlr., deren Werth so bestimmt wird. Hätte er am Ende des vierten Jahres die ganzen 8000 thlr. zusammen gezahlt, so würde man ihren gegenwärtigen Werth nach der vorigen Formel haben suchen müssen. Aber da die 8000 thlr. in jährlichen Terminen zu 2000 thlr. gezahlt werden, so muß man den Werth jedes einzelnen Postens nach obiger Formel suchen. Die ersten 2000 thlr. sind auf 4, die zweiten auf 5, die dritten auf 6, die vierten auf 7 Jahre zu diskontiren. Dies giebt also den Werth der ganzen 8000 thlr.

$$\text{oder } S = \frac{a}{(1+u)^4} + \frac{a}{(1+u)^5} + \frac{a}{(1+u)^6} + \frac{a}{(1+u)^7}$$

$$= a\left(\frac{1}{(1+u)^4} + \frac{1}{(1+u)^5} + \frac{1}{(1+u)^6} + \frac{1}{(1+u)^7}\right)$$

$$= 2000\left(\frac{1}{1{,}05^4} + \frac{1}{1{,}05^5} + \frac{1}{1{,}05^6} + \frac{1}{1{,}05^7}\right)$$

Was in der Klammer steht, ist eine geometrische Progression, deren erstes Glied $a = \frac{1}{(1+u)^4}$, der Exponent $e = \frac{1}{(1+u)}$ und die Zahl der Glieder $n = 4$ ist. Es ist also die Summe

$$\frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{\frac{1}{(1+u)^4} \cdot \left(\frac{1}{(1+u)^4} - 1\right)}{\frac{1}{1+u} - 1}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{(1+u)^4}}{1 - \frac{1}{1+u}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{(1+u)^4}}{\frac{1+u-1}{1+u}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{(1+u)^4}}{\frac{u}{1+u}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{(1+u)^4} \cdot \frac{1+u}{u}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{u(1+u)^3}.$$

Daher ist der Werth von

$$a = Q\left[\left(1 - \frac{1}{(1+u)^4}\right) \cdot \frac{1}{u(1+u)^3}\right].$$

Also in Zahlen

$$a = \left[\left(1 - \frac{1}{1{,}05^4}\right) \cdot \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^3}\right] \cdot 2000 \text{ thlr.}$$

Dies gibt folgende Rechnung

Log. 1	= 1,0000000—1,
4. Log. 1,05	= 0,0847572,
	0,9152428—1.

Dazu gehört die Zahl 0,8227023, welche von 1 abgezogen, 1772976 zum Rest läßt, wovon der Logar. = 0,2487038—1

Nun ist

Log. 0,05	= 0,6989700—2,
3. Log. 1,05	= 0,0635679,
Log. 0,05 + Log. 1,05	= 0,7625379—2.
Dies abgezogen von Log. 1	= 1,0000000—1,
bleibt	0,2374621+1,
oder	1,2374621.

Es ist also

$\text{Log.} \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^3}$	= 1,2374621,
$\text{Log.} \left(1 - \frac{1}{1{,}05^4}\right)$	= 0,2487038—1,
Log. 2000	= 3,3010300,
	3,7871959.

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 6126,265. Das dritte Gebot hat also den gegenwärtigen Werth von

1000 + 2591,51 + 6126,26 = 9717,77 thlr.;

er hat also das größte gethan.

§. 27.

So wie in den vorigen Exempeln kann man auch hier fragen nach dem Zinsfuße, nach den Summen, die terminweise bezahlt werden, nach der Anzahl der Termine u. s. w. Wir wollen dazu noch einige Exempel geben.

1) Das vorige Exempel läßt sich so umkehren: Auf ein Haus geschehen drei Gebote. A bietet 9000 thlr. baar, B 2000 thlr. baar, das Übrige in vier gleichen jährlichen Terminen, so daß dadurch sein Gebot einen Werth von 9090 thlr. bekommt; C 1000 thlr. baar, das Übrige in fünf Terminen, der erste und größte nach drei Jahren, die andern vier gleich großen Termine in den nächsten vier Jahren, jedes Jahr einen. Der

C 1000 thlr. baar, und nach 8 Jahren noch 3200 thlr. Wenn man nun weiß, daß der gegenwärtige Werth des zweiten Gebots = 3271,086 und der des dritten = 3338,21 ist, wie viel Prozent sind gerechnet?

Die Antwort ergibt sich aus §. 24. vierte Aufgabe. Da der baare Werth des zweiten Gebots = 3271,086 thlr. ist und 600 thlr. sogleich baar gezahlt werden, so ist der Werth der in fünf jährlichen und gleichen Terminen zahlbaren 3000 thlr. = 2671,086 thlr. Nun ist in der Gleichung §. 24. vierte Aufgabe

$$x^{n+1} - x^n\left(1 + \frac{a}{S}\right) = -\frac{a}{S}$$

die Größe $n = 5$, $a = 600$, $S = 2671{,}086$, folglich hat man $x^6 - x^5\left(1 + \frac{600}{2671{,}086}\right) = -\frac{600}{2671{,}086}$.

Es ist Log. 600 = 3,7781513—1,
Log. 2671,086 = 3,4266878,
Rest = 0,3514635—1.

Dazu gehört die Zahl 0,2246277 und 1 dazu addirt, kommt 1,2246277. Also heißt die Gleichung

$$x^6 - x^5 \cdot 1{,}2246277 = -0{,}2246277.$$

Probirt man nun in derselben für x nach und nach die Werthe 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; so findet man, daß x = 1,04 die Gleichung aufhebt. Es ist nämlich

$1{,}04^6 = 1{,}265318$,
$1{,}04^5 = 1{,}216652$,
und $1{,}04^5 \cdot 1{,}2246277 = 1{,}489946$.
Also $1{,}04^6 - 1{,}04^5 \cdot 1{,}2246277 = -0{,}224628$,
und so viel ist auch die Zahl auf der rechten Seite.

Von dem dritten Gebote war der baare Werth = 3338,21 und da 1000 thlr. sogleich angezahlt werden, so ist der baare Werth der nach 8 Jahren zahlbaren 3200 thlr. = 2338,21 thlr. Nun rechnet man nach §. 20. vierte Aufgabe. Dort ist

$$\text{Log.}(1+u) = \frac{\text{Log. Q} - \text{Log. a}}{n}.$$

Nun ist Q = 3200, a = 2338,21, n = 8. Also

Log. Q = 3,5051500,
Log. a = 3,3688835,
Rest 0,1362665.

Dies durch 8 dividirt, kommt Log. (1 + u) = 0,0170333 und dazu gehört die Zahl 1,04, also 1 + u = 1,04, folglich u = 0,04 und der Zinsfuß daher 4 Prozent.

3) Eben so kann man finden, in wie viel jährlichen Terminen ein Gebot gezahlt werden muß, wenn es einen bestimmten gegenwärtigen Werth haben soll und der Zinsfuß bekannt ist. Auf ein Haus werden z. B. 4400 thlr. baar geboten, ein Anderer aber will in gewissen Terminen eine Summe zahlen, deren gegenwärtiger Werth den des ersten Gebots um 362,41 thlr. übertrifft. Wenn er nun in jedem Termine 1100 thlr. zahlt und der Zinsfuß 5 Prozent gerechnet wird, wie viel Termine müssen genommen werden und wie viel bot er auf das Haus?

Die Antwort ergibt sich aus §. 24. dritte Aufgabe. Da nämlich der baare Werth des zweiten Gebots das erste um 362,41 thlr. übertrifft, so ist derselbe = 4762,41 thlr. Man kann also dies als eine Schuld betrachten, die der Bieter in gleichen jährlichen Terminen, jeden zu 1100 thlr., mit ihren Zinseszinsen tilgen will. Folglich ist die Antwort

$$n = \frac{\text{Log.}\frac{a}{a-uS}}{\text{Log.}(1+u)}.$$

In dieser Formel ist $a = 1100$ thlr., $S = 4762{,}41$ und $u = 0{,}05$. Folglich ist

$$n = \frac{\text{Log.}\frac{1100}{1100-0.05\,.\,4762{,}41}}{\text{Log. } 1{,}05}.$$

Es ist
$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 0{,}05 & = 0{,}6989700-2, \\ \text{Log. } 4762{,}41 & = 3{,}6778268, \\ \hline & 2{,}3767968. \end{array}$$

Dazu gehört die Zahl 238,1205, folglich ist

$$1100 - 238{,}1205 = 861{,}8794.$$

Ferner
$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 1100 & = 3{,}0413927, \\ \text{Log. } 861{,}8794 & = 2{,}9354466. \\ \hline & 0{,}1059461. \end{array}$$

Dividirt man nun in diesen Logarithmen mit Log. 1,05 = 0,0211893, so ist der Quotient bis auf eine Kleinigkeit = 5. Es muß also der Bieter 5 Jahre nach einander jedes Jahr 1100 thlr. zahlen; sein Gebot war also 5500 thlr.

Anwendung der zusammengesetzten Zinsrechnung auf die Lehre von Zeit- und Leibrenten.

§. 28.

Auf die Lehre von zusammengesetzten Zinsen bezieht sich auch die Berechnung der Zeit- und Leibrenten. Da von

diesen so oft die Rede ist, so wollen wir wenigstens das Wichtigste davon hier mittheilen, und zeigen, auf welchen Gründen die dabei nöthigen Rechnungen beruhen.

Eine Rente ist überhaupt jede Geldeinnahme, die in gleichen und bestimmten Terminen, z. B. alle Jahre, alle halbe Jahre, alle Monate u. s. w. erhoben wird. Der Empfänger der Einnahme heißt der Rentenirer, und hat man eine solche Einnahme gegen Erlegung einer bestimmten Geldsumme gekauft, so heißt dies Kaufgeld die Mise, und der, welcher die Mise empfängt und die Rente zahlt, der Entrepreneur. Nach der Größe der Zwischenzeit von einem Termin zum andern ist die Rente eine Jahrrente, Halbjahrrente, Vierteljahrrente u. s. w. Wird sie eine bestimmte Zahl von Terminen lang bezahlt, so ist sie eine gewisse Rente; hängt aber ihre Abzahlung von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen ab, so ist es eine Leibrente. Wird in jedem Termin gleich viel bezahlt, so ist es eine unveränderliche Rente; wird aber nach einer gewissen Regel bald mehr, bald weniger bezahlt, so ist sie veränderlich, und hängt diese Veränderung von dem Leben oder Tode einer oder mehrerer Personen ab, so ist sie eine veränderliche Lebensrente, wohin z. B. die Tontinen gehören, bei denen die Rente immer größer wird, je mehr von den zur Tontinengesellschaft gehörigen Personen absterben, weil die Überlebenden allemal die Renten der Verstorbenen erben.

§. 29.

Soll jemand gegen eine eingelegte Summe auf eine bestimmte Anzahl von Jahren eine unveränderliche Zeitrente erhalten, so muß man offenbar berechnen, wie hoch das eingelegte Kapital mit seinen Zinseszinsen in der gegebenen Zeit anwächst, und wie viel die in den einzelnen Terminen gezahlten Renten mit ihren Zinseszinsen betragen. Sind beide Hauptsummen einander gleich, so ist die Rente richtig bestimmt. Es ist also dieselbe Rechnung, wie in §. 24. Die im Anfange eingelegte Summe sei $= S$, die jährliche Rente $= a$, die Zahl der Jahre, in denen die Rente gezahlt wird, $= n$, der Zinsfuß $= w$ von 100, also $\frac{w}{100} = u$. Von diesen Größen kann entweder S, oder a, oder n, oder u gesucht werden, wenn die übrigen drei Größen bekannt sind. Dies gibt also folgende vier Aufgaben:

Erste.

Erste Aufgabe.

Es wünscht jemand eine jährliche Rente von a thlr. auf n Jahre zu haben; wie groß ist die Mise S, die er dem Entrepreneur zahlen muß, wenn w Prozent gerechnet werden?

Die Mise S ist nach n Jahren werth $S(1+u)^n$. Die Rente a wird am Ende des ersten, zweiten, dritten .... nten Jahres gezahlt. Untersucht man nun, was jede einzelne Rente am Ende des nten Jahres werth ist, so ergibt sich, daß jede als ein Kapital zu betrachten ist, das von da an, wo es gezahlt wird, bis zum Ende des nten Jahres aussteht und zu dem die Zinsen geschlagen werden. Die erste Rente, welche am Ende des ersten Jahres gezahlt wird, steht $n-1$ Jahre, die zweite $n-2$, die dritte $n-3$, die letzte, am Ende des nten Jahres gezahlte, gar kein Jahr. Dies gibt also die Werthe der einzelnen Renten $= a(1+u)^{n-1}$, $a(1+u)^{n-2}$, $a(1+u)^{n-3}$, $a(1+u)^{n-4}$ u. s. w. und den Werth der letzten $= a(1+u)^0 = a.1$. Daraus ergibt sich also, wie §. 24., die Gleichung

$$S(1+u)^n = a[(1+u)^{n-1}+(1+u)^{n-2}+(1+u)^{n-3}\ldots+1].$$

Dividirt man nun alle Glieder durch $(1+u)^n$, so kommt

$$S = a\left(\frac{(1+u)^{n-1}}{(1+u)^n}+\frac{(1+u)^{n-2}}{(1+u)^n}+\frac{(1+u)^{n-3}}{(1+u)^n}+\ldots+\frac{1}{(1+u)^n}\right),$$

oder

$$S = a\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{(1+u)^3}+\ldots+\frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Was in der Klammer steht, ist eine geometrische Progression, deren erstes Glied $a = \frac{1}{(1+u)}$, der Exponent $e = \frac{1}{1+u}$ und die Zahl der Glieder $= n$ ist.

Nach Th. I. §. 169. war die Summe einer geometrischen Progression $= \frac{a(e^n-1)}{e-1}$. Es ist folglich die Summe der in Klammer geschlossenen Glieder

$$= \frac{\frac{1}{1+u}\cdot\left(\frac{1}{(1+u)^n}-1\right)}{\frac{1}{1+u}-1}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)\cdot\frac{1}{1+u}}{1-\frac{1}{1+u}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right) \cdot \frac{1}{1+u}}{\frac{1+u-1}{1+u}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right) \cdot \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1+u}{u}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right) \cdot \frac{1}{u}$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}.$$

Daher iſt $S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$.

Exempel.

Jemand empfängt 20 Jahre lang jährlich eine Rente von 200 thlr., die jedesmal am Ende des Jahres ausgezahlt wird; wie groß war die Miſe, die er am Anfange des erſten Jahres dem Entrepreneur zahlte, wenn der Zinsfuß zu 4 Prozent gerechnet wird?

Es iſt $a = 200$, $n = 20$, $w = 4$, alſo $u = 0{,}04$, und S wird geſucht. Es iſt alſo

$$S = 200\left(\frac{1}{0{,}04} - \frac{1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{20}}\right)$$

$$= 200\left(25 - \frac{1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{20}}\right).$$

Man berechne zuerſt den Nenner des abzuziehenden Bruchs und dann den ganzen Bruch vermittelſt der Logarithmen. Es iſt

	$\text{Log. } 0{,}04$	$= 0{,}6020600 - 2,$
	$20 \cdot \text{Log. } 1{,}04$	$= 0{,}3406660,$
	$\text{Log. } 0{,}04 + 20 \cdot \text{Log. } 1{,}04$	$= 0{,}9427260 - 2,$
	$\text{Log. } 1$	$= 1{,}0000000 - 1,$
abgezogen.	$\text{Log. } 0{,}04 + 20 \cdot \text{Log. } 1{,}04$	$= 0{,}9427260 - 2,$
	$\text{Log.} \frac{1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{20}}$	$= 0{,}0572740 + 1$
		$= 1{,}0572740.$

Dazu gehört die Zahl 11,40968. Es iſt alſo

$S = 200(25 - 11{,}40968) = 200 \cdot 13{,}59031 = 2718{,}063.$

Die geſuchte Miſe iſt alſo 2718 thlr. 1 gr. 6 pf.

Zweite Aufgabe.

Wie groß ist die Rente a, welche jemand n Jahre hindurch ausgezahlt erhält, wenn die Mise am Anfange des ersten Jahres = S ist und w Prozent gerechnet werden?

Bekannt ist S, n, u, gesucht wird a. Es war

$$S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

also

$$\frac{S}{\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}} = a.$$

Exempel.

Wenn man dem Entrepreneur eine Mise von 3580 thlr. zahlt, wie groß ist die Rente, die man 30 Jahre lang jährlich genießen kann, den Zinsfuß zu 5 Prozent gerechnet?

Es ist also $a = \frac{3580}{\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{30}}}$.

Man berechne wieder erst den Nenner. Es ist $\frac{1}{0{,}05} = 20$. Der Subtrahendus $\frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{30}}$ wird durch Logarithmen gefunden. Es ist

	Log. 0,05	= 0,6989700 − 2,
	30 . Log. 1,05	= 0,6356790,
		1,3346490 − 2,
oder		0,3346490 − 1,
	Log. 1	= 1,0000000 − 1,
		0,6653510.

Dazu gehört die Zahl 4,62755. Diese von 20 abgezogen, bleibt 15,37244. Nun ist

	Log. 3580	= 3,5538830,
abgezogen	Log. 15,37244	= 1,1867428,
bleibt		2,3671402.

Hiezu gehört die Zahl 232,884 oder 232 thlr. 21 gr. 2½ pf. So groß ist also die jährliche Rente.

Dritte Aufgabe.

Es hat jemand eine jährliche Rente a mehrere Jahre lang zu genießen und hat dafür am Anfange des ersten Jahres eine Mise = S gezahlt. Wenn man nun w Prozent rechnet, wie viel Jahre kann die Rente ausgezahlt werden?

Bekannt ſind S, a, u, geſucht wird n. Es iſt

$$S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

alſo $$\frac{S}{a} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n},$$

oder $$\frac{S}{a} - \frac{1}{u} = -\frac{1}{u(1+u)^n},$$

oder $$\frac{1}{u} - \frac{S}{a} = \frac{1}{u(1+u)^n},$$

oder $$\frac{a-uS}{au} = \frac{1}{u(1+u)^n},$$

Mit u multiplizirt, kommt

$$\frac{a-uS}{a} = \frac{1}{(1+u)^n},$$

und mit $(1+u)^n$ und a multiplizirt, kommt

$$(a-uS)(1+u)^n = a,$$

folglich $$(1+u)^n = \frac{a}{a-uS},$$

alſo $$n \cdot \text{Log.}(1+u) = \text{Log.}\frac{a}{a-uS},$$

daher $$n = \frac{\text{Log.}\frac{a}{a-uS}}{\text{Log.}(1+u)}.$$

Exempel.

Für eine Miſe von 4611 thlr. 17 gr. 8 pf. erhält jemand eine jährliche Rente von 300 thlr., wie lange kann ihm dieſelbe ausgezahlt werden, wenn man den Zinsfuß zu 5 Prozent rechnet?

Es iſt $S = 4611$ thlr. 17 gr. 8 pf. $= 4611{,}736$ thlr., $a = 300$ thlr., $u = 0{,}05$. Alſo iſt

$$n = \frac{\text{Log.}\frac{300}{300 - 4611{,}736 \cdot 0{,}05}}{\text{Log. } 1{,}05}.$$

Es iſt $4611{,}736 \cdot 0{,}05 = 230{,}58680$, alſo

$$300 - 230{,}58680 = 69{,}41319.$$

Von jetzt an rechne man mit Logarithmen. Es iſt

$$\begin{array}{rl} & \text{Log. } 300 = 2{,}4771213, \\ \text{abgezogen} & \text{Log. } 69{,}4132 = 1{,}8414420, \\ \hline & 0{,}6356793. \end{array}$$

Dies ist also Log. $\frac{a}{a-uS}$. In diesen Logarithmen dividire man mit Log. 1,05 = 0,0211893, so kommt zum Quotienten 30. Die Rente kann also 30 Jahre lang bezahlt werden.

Vierte Aufgabe.

Auf eine Mise = S wird eine jährliche Rente = a eine Zeit von n Jahren hindurch gegeben; wie viel Prozent sind gerechnet?

Es sind S, a und n bekannt, gesucht wird u. Aus

$$S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$$

ergibt sich $S = \frac{a}{u} - \frac{a}{u(1+u)^n}$.

Alle Glieder mit dem Nenner $u(1+u)^n$ multiplizirt, kommt

$$Su(1+u)^n = a(1+u)^n - a,$$

folglich $Su(1+u)^n - a(1+u)^n = -a.$

Setzt man nun $1+u = x$, so ist $u = x-1$, also wird die letzte Gleichung in folgende verwandelt

$$S(x-1)x^n - ax^n = -a,$$

oder $S(x^{n+1} - x^n) - ax^n = -a,$

oder $Sx^{n+1} - Sx^n - ax^n = -a,$

oder $Sx^{n+1} - x^n(S+a) = -a,$

oder $x^{n+1} - x^n\frac{S+a}{S} = -\frac{a}{S},$

oder $x^{n+1} - x^n\left(1+\frac{a}{S}\right) = -\frac{a}{S}.$

Exempel.

Für eine Mise von 17159 thlr. 2 gr. $2\frac{1}{2}$ pf. wird 40 Jahre lang eine Rente von 1000 thlr. jährlich gezahlt; wie viel Prozent beträgt der Zinsfuß?

Hier ist S = 17159 thlr. 2 gr. $2\frac{1}{2}$ pf. = 17159,092 thlr., a = 1000 thlr., n = 40. Dies gibt die Gleichung

$$x^{41} - x^{40}\left(1 + \frac{1000}{17159,092}\right) = -\frac{1000}{17159,092}.$$

Man berechne zuerst den Quotienten $\frac{1000}{17159,092}$.

Log. 1000 = 5,0000000 − 2,

Log. 17159,092 = 4,2344943,

0,7655056 − 2.

Dazu gehört die Zahl 0,05827814. Also ist

$$1 + \frac{1000}{17159,092} = 1,05827814.$$

Man hat also die Gleichung

$$x^{41} - x^{40} \cdot 1,05827814 = -0,05827814.$$

Diese Gleichung können wir vor jetzt nur durch Probiren auflösen. Setzt man also x nach und nach $= 1,02$; $1,03$; $1,04$; $1,05$ u. s. w.; so wird die Gleichung bei dem Werthe $1,05$ sich aufheben. Es ist nämlich

$$\text{Log. } x^{41} = 41 \cdot \text{Log. } x = 41 \cdot \text{Log. } 1,05 = 0,8687613$$

und dazu gehört die Zahl 7,39199. Ferner

$$\text{Log. } x^{40} = 40 \cdot \text{Log. } x = 40 \cdot \text{Log. } 1,05 = 0,8475720,$$
$$\text{Log. } 1,05827814 = 0,0246000,$$
$$0,8721720.$$

Dazu gehört die Zahl 7,45027.

Man hat folglich die Gleichung

$$7,39199 - 7,45027 = -0,058278,$$

welche bis auf die letzte Dezimalstelle richtig ist.

§. 30.

Es kann der Fall eintreten, daß man nach gezahlter Mise die Rente nicht sogleich am Ende des ersten Jahres ausgezahlt bekommt, sondern erst nach Verlauf mehrerer Jahre. Dies heißt alsdann eine aufgeschobene Rente. Wird die Rente z. B. nach m Jahren erst ausgezahlt, so ruhet sie, wie man sich ausdrückt, $m-1$ Jahre, denn mit dem Anfange des $m$ten Jahres fängt die Rente an zu laufen, d. h. die Zinsen derselben müssen vom Entrepreneur in Anschlag gebracht werden. Offenbar braucht in solchem Falle die Mise nicht so groß zu sein, als wenn die Rente gleich am Ende des ersten Jahres ausgezahlt würde. Denn das, was am Anfange der m Jahre gezahlt wird, wächst durch die Zinsen bis zum Ende des $m-1$ Jahres. Heißt die anfängliche Mise S und wächst sie in $m-1$ Jahren zu S', so ist offenbar, daß man die nämliche Rente erhalten muß, man mag nun jetzt S oder nach $m-1$ Jahren S' geben. Verlangt man die Rente a, und soll diese n Jahre lang gezahlt werden, so wäre der Werth von S' am Anfange der n Jahre $= a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$. Dieses S' aber hätte, $m-1$ Jahre zurückgerechnet, einen Werth von $S'\left(\frac{1}{(1+u)^{m-1}}\right)$,

und setzt man diesen Werth $= S$, so wäre

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a,$$

weil man in der Gleichung $S = S'\left(\frac{1}{(1+u)^{m-1}}\right)$ statt S' einen Werth $\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$ setzen kann. Für diesen Fall ergeben sich nun folgende Aufgaben.

Erste Aufgabe.

Wie groß ist die Mise, welche ich jetzt zahlen muß, wenn ich nach Verlauf von m Jahren eine jährliche Rente von a thlr. auf n Jahre haben will, den Zinsfuß zu w Prozent gerechnet?

Die Antwort ist im Vorigen enthalten. Es ist die Mise

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a.$$

Exempel.

Es wünscht sich jemand nach Verlauf von 20 Jahren eine jährliche Rente von 300 thlr. auf 30 Jahre zu kaufen; wie groß ist die Mise, die er jetzt zahlen muß, wenn man die Zinsen zu 5 Prozent rechnet?

Es ist also $a = 300$, $m = 20$, $n = 30$, $u = 0{,}05$ und S wird gesucht. Also

$$S = \frac{1}{1{,}05^{19}} \cdot \left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{30}}\right) 300.$$

Man berechne zuerst die Größe in der Klammer

Log. 0,05	= 0,6989700—2,
30. Log. 1,05	= 0,6356790,
	1,3346490—2,
oder	0,3346490—1.
Dies abgezogen von Log. 1	= 1,0000000—1,
bleibt	0,6653510.

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 4,627548. Dieses von $\frac{1}{0{,}05} = 20$ abgezogen, bleibt 15,372451. Nun ist

Log. 1	= 1,0000000—1,
19. Log. 1,05	= 0,4025967,
	0,5974033—1,
Log. 15,372451	= 1,1867431,
Log. 300	= 2,4771213,
	3,2612677.

Dazu gehört die Zahl 1825,02 oder 1825 thlr. — gr. 5,7 pf. Diese Mise wächst in den 19 Jahren, wo sie ruhet, an $a(1+u)^{19} = 1825{,}02 \cdot 1{,}05^{19} = 4612{,}735$ thlr. an, und eine Mise von dieser Größe erhält folglich eine 30 jährige Rente von 300 thlr. mit dem Ende des ersten Jahres.

Zweite Aufgabe.

Eine Mise $= S$ ruhet $m-1$ Jahre, wie groß ist die Rente, die sie vom Ende des mten Jahres an n Jahre nach einander zu w Prozent tragen kann?

Bekannt sind S, m, n, u, gesucht wird a. Es war

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n} \right) a.$$

Daraus ergibt sich

$$a = \frac{S}{\frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n} \right)}$$

Exempel.

Es zahlt jemand dem Entrepreneur eine Mise von 600 thlr., dafür will er nach 30 Jahren eine 40 Jahr dauernde Rente haben, wie groß kann dieselbe sein, wenn 5 Prozent gerechnet werden?

Es ist $$a = \frac{600}{\frac{1}{1{,}05^{29}} \cdot \left(\frac{1}{0{,}05} - \frac{1}{0{,}05 \cdot 1{,}05^{40}} \right)}$$

	Log. 0,05	$= 0{,}6989700 - 2,$
	40 . Log. 1,05	$= 0{,}8475720,$
		$0{,}5465420 - 1,$
abgezogen von	Log. 1	$= 1{,}0000000 - 1,$
bleibt		$0{,}4534580 - 2.$

Dazu gehört die Zahl 2,840914. Diese von $\frac{1}{0{,}05}$ oder 20 abgezogen, bleibt 17,159085. Ferner

	29 . Log. 1,05	$= 0{,}6144897,$
dies abgezogen von	Log. 1	$= 1{,}0000000 - 1,$
bleibt		$0{,}3855102 - 1.$
Dazu addirt	Log. 17,159085	$= 1{,}2344941,$
kommt		$0{,}6200043.$
Dies abgezogen von	Log. 600	$= 2{,}7781513,$
bleibt		$2{,}1581470.$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl 143,928 thlr. = 143 thlr. 22 gr. 3,3 pf.

Diese Rente erhalte ich also, für die Mise von 600 thlr., denn durch die 29 jährige Ruhe wächst dieselbe zu 2469,68 thlr. an und davon ist am Ende des dreißigsten Jahres die 40 jährige Rente = 143 thlr. 22 gr. 3,3 pf.

Dritte Aufgabe.

Eine Mise = S ruhet mehrere Jahre und trägt dann eine n-jährige Rente von a thlr., wie lange hat dieselbe geruhet, wenn man w Prozent rechnet?

Bekannt sind S, a, n, u, gesucht wird m. Es ist

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a.$$

Also $$\frac{S}{\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a} = \frac{1}{(1+u)^{m-1}},$$

daher $$S(1+u)^{m-1} = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

folglich $$(1+u)^{m-1} = \frac{a}{S}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

also $$(m-1) \cdot \text{Log.}(1+u) = \text{Log.}\frac{a}{S}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

und $$m - 1 = \frac{\text{Log.}\frac{a}{S}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)}{\text{Log.}(1+u)}.$$

Exempel.

Das vorige mag als Probe dienen. Wenn also jemand eine Mise von 600 thlr. mehrere Jahre ruhen läßt und dann eine 40 jährige Rente von 143 thlr. 22 gr. 3,3 pf. erhält, wie lange hat die Mise geruhet, wenn 5 Prozent gerechnet werden?

Es ist S = 600, a = 143 thlr. 22 gr. 3,3 pf. = 143,9284, n = 40 und u = 0,05.

Nach der obigen Formel ist also

$$m - 1 = \frac{\text{Log.}\frac{143,9284}{600}\left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,05 \cdot 1,05^{40}}\right)}{\text{Log. } 1,05},$$

$$\begin{array}{lrl} & \text{Log. } 0{,}05 = & 0{,}6989700-2, \\ & 40 \cdot \text{Log. } 1{,}05 = & 0{,}8475720, \\ \hline & & 0{,}5465420-1, \\ \text{Dies abgezogen von} & \text{Log. } 1 = & 1{,}0000000-1. \\ \hline \text{bleibt} & & 0{,}4534580. \end{array}$$

Dazu gehört die Zahl 2,840914. Diese von $\frac{1}{0{,}05}$ oder 20 abgezogen, bleibt 17,159085. Nun ist

$$\begin{array}{lrl} & \text{Log. } 17{,}159085 = & 1{,}2344941, \\ & \text{Log. } 143{,}9284 = & 2{,}1581467, \\ \hline & & 3{,}3926408. \\ \text{Davon abgezogen} & \text{Log. } 600 = & 2{,}7781513, \\ \hline & & 0{,}6144895. \end{array}$$

Dieser Logarithme wird durch Log. 1,05 = 0,0211893 dividirt, der Quotient ist = 29, also $m - 1 = 29$, folglich $m = 30$. Die Mise hat also 29 Jahre geruhet und mit dem Ende des dreißigsten Jahres ist die erste Rente bezahlt worden.

Vierte Aufgabe.

Eine Mise = S hat $m - 1$ Jahr geruhet und nun erhält man davon eine mehrjährige Rente = a; wie lange kann man diese genießen, wenn w Prozent gerechnet werden?

Bekannt sind S, a, m, u, gesucht wird n. Es ist

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a.$$

Also
$$\frac{S}{\frac{1}{(1+u)^{m-1}}} = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a,$$

oder
$$S(1+u)^{m-1} = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a,$$

folglich
$$\frac{S(1+u)^{m-1}}{a} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n},$$

daher
$$\frac{S(1+u)^{m-1}}{a} - \frac{1}{u} = -\frac{1}{u(1+u)^n},$$

oder
$$\frac{1}{u} - \frac{S(1+u)^{m-1}}{a} = \frac{1}{u(1+u)^n}.$$

Alles mit $u(1+u)^n$ multiplizirt, kommt

$$(1+u)^n - \frac{S(1+u)^{m-1} \cdot u(1+u)^n}{a} = 1,$$

und mit a multiplizirt, kommt

$$a(1+u)^n - S(1+u)^{m-1} \cdot u(1+u)^n = a,$$

folglich $$[a - S(1+u)^{m-1} \cdot u] \cdot (1+u)^n = a,$$

daher $$(1+u)^n = \frac{a}{a - S(1+u)^{m-1} \cdot u},$$

und $$n \cdot \text{Log.}(1+u) = \text{Log.} \frac{a}{a - S(1+u)^{m-1} \cdot u},$$

also $$n = \frac{\text{Log.} \frac{a}{a - S(1+u)^{m-1} \cdot u}}{\text{Log.}(1+u)}.$$

Exempel.

Es hat jemand eine Mise von 1000 thlr. eingelegt, welche 19 Jahre ruhen und dann eine Rente von 164 thlr. 9 gr. 1,9 pf. tragen soll; wie lange wird diese Rente gezahlt werden können, wenn 5 Prozent gerechnet werden?

Es ist also $S = 1000$, $a = 164$ thlr. 9 gr. 1,9 pf. $= 164{,}3816$, $m = 20$, $u = 0{,}05$. Folglich ist

$$n = \frac{\text{Log.} \frac{164{,}3816}{164{,}3816 - 1000 \cdot 1{,}05^{19} \cdot 0{,}05}}{\text{Log. } 1{,}05}.$$

Es ist

Log. 1000	= 3,0000000,
19 . Log. 1,05	= 0,4025967,
Log. 0,05	= 0,6989700—2,
	2,1015667.

Dazu gehört die Zahl 126,3474. Diese von 164,3816 abgezogen, bleibt 38,0342. Nun ist

Log. 164,3816	= 2,2158536.
Davon abgezogen Log. 38,0342	= 1,5801743,
bleibt	0,6356793.

Dividirt man nun in diesen Logarithmen mit Log. 1,05 = 0,0211893, so kommt zum Quotienten 30. Also 30 Jahre lang kann die Rente genossen werden.

Fünfte Aufgabe.

Eine Mise $= S$ ruhet $m-1$ Jahre und trägt dann n Jahre lang die Rente a; wie hoch ist der Zinsfuß gerechnet?

Bekannt sind S, a, m, n, gesucht wird u. Es ist

$$S = \frac{1}{(1+u)^{m-1}} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) a.$$

Multiplizirt man die Größe in der Klammer wirklich mit $\frac{1}{(1+u)^{m-1}}$, so kommt

$$S = \left(\frac{1}{u(1+u)^{m-1}} - \frac{1}{u(1+u)^{m-1}\cdot(1+u)^n}\right) a.$$

Die Brüche unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$S = \left(\frac{(1+u)^n}{u(1+u)^{m-1}\cdot(1+u)^n} - \frac{1}{u(1+u)^{m-1}\cdot(1+u)^n}\right) a.$$

Mit dem gemeinschaftlichen Nenner alle Glieder durch multiplizirt, kommt

$$Su(1+u)^{m-1}\cdot(1+u)^n = [(1+u)^n - 1]a,$$

oder $$Su(1+u)^{m+n-1} = a(1+u)^n - a,$$

oder $$Su(1+u)^{m+n-1} - a(1+u)^n = -a.$$

Setzt man jetzt $1+u = x$, also $u = x-1$, so kommt

$$S(x-1)\cdot x^{m+n-1} - ax^n = -a,$$

oder $$S(x^{m+n} - x^{m+n-1}) - ax^n = -a,$$

folglich $$x^{m+n} - x^{m+n-1} - x^n \cdot \frac{a}{S} = -\frac{a}{S}.$$

Exempel.

Nehmen wir das vorige Beispiel, um daraus x zu berechnen, so ist $S = 1000$, $a = 164{,}3816$, $m = 20$, $n = 30$. Daraus ergibt sich also folgende Gleichung

$$x^{50} - x^{49} - x^{30} \cdot \frac{164{,}3816}{1000} = -\frac{164{,}3816}{1000},$$

oder $$x^{50} - x^{49} - x^{30} \cdot 0{,}1643816 = -0{,}1643816.$$

Diese Gleichung können wir indessen nur durch Probiren lösen, indem wir nach und nach für x verschiedene Werthe setzen, z. E. $x = 1{,}03$; $1{,}04$; $1{,}05$ u. s. w., bis einer dieser Werthe die Gleichung aufhebt. Dies geschieht, wenn man $x = 1{,}05$ setzt. Alsdann ist

$$50 \cdot \text{Log.} x = 1{,}0594650.$$

Dazu gehört die Zahl $11{,}467463$, also

$$x^{50} = 11{,}467463,$$

$$49 \cdot \text{Log.} x = 1{,}0384757.$$

Dazu gehört die Zahl 10,921335, also

$$x^{49} = 10{,}921335.$$

$$30 \cdot \text{Log. } x = 0{,}6356790,$$

$$\text{Log. } 0{,}1643816 = 0{,}2158536 - 1,$$

$$0{,}8515326 - 1.$$

Dazu gehört die Zahl 0,7104483, also ist

$$x^{30} = 0{,}1643816 = 0{,}7104483.$$

Daraus entsteht nun die Gleichung

$$11{,}467463 - 10{,}921335 - 0{,}7104483 = -0{,}1643816,$$

oder

$$11{,}467463 - (10{,}921335 + 0{,}710448) = -0{,}1643816,$$

oder

$$11{,}467463 - 11{,}631783 = -0{,}164320.$$

Diese Gleichung ist bis auf die letzten Dezimalstellen richtig.

§. 31.

Verlangt jemand eine Rente halb- oder vierteljährlich zu beziehen, so kann er nicht die Hälfte oder das Viertel der ganzen jährlichen Rente bekommen, weil sonst, wie wir oben gezeigt haben, der Zinsfuß höher, als bestimmt ist, ausfallen würde. Wächst nämlich das Kapital 1 jährlich zu $1+u$, so wächst es im $m$ten Theile des Jahres nicht zu $1+\frac{u}{m}$, sondern zu $(1+u)^{\frac{1}{m}}$. Die Anzahl der Termine aber, in denen die Rente gezahlt wird, ist, wenn n die Zahl der Jahre und m die Anzahl der Termine in jedem Jahre bedeutet, $= nm$. Die halbjährliche Rente hat also $2n$, die vierteljährliche $4n$ Termine u. s. w. Ist Q die Summe, die am Ende des ersten, zweiten, dritten, vierten .... nten Halbjahres gezahlt wird, so ist der Werth eines jeden Q am Anfange des ersten Halbjahres $= Q(1+u)^{n-\frac{1}{2}}, Q(1+u)^{n-1}, Q(1+u)^{n-\frac{3}{2}}, Q(1+u)^{n-2} \ldots Q(1+u)^{0}$, und da der Werth der Mise am Ende des $n$ten Jahres $= S(1+u)^n$ ist, so hat man, wie §. 29., die Gleichung

$$(1+u)^n = Q[(1+u)^{n-\frac{1}{2}} + (1+u)^{n-1} + (1+u)^{n-\frac{3}{2}} + (1+u)^{n-2} + \ldots + (1+u)^0],$$

$$= Q\left(\frac{(1+u)^{n-\frac{1}{2}}}{(1+u)^n} + \frac{(1+u)^{n-1}}{(1+u)^n} + \frac{(1+u)^{n-\frac{3}{2}}}{(1+u)^n} + \frac{(1+u)^{n-2}}{(1+u)^n} + \ldots + \frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$= Q[(1+u)^{-\frac{1}{2}} + (1+u)^{-1} + (1+u)^{-\frac{3}{2}} + (1+u)^{-2} + \ldots\ldots + (1+u)^{-n}]$$

$$= Q\left(\frac{1}{(1+u)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(1+u)^1} + \frac{1}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+u)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Um die Übersicht leichter zu machen, wollen wir $(1+u)^{\frac{1}{2}} = z$ setzen, so erhält man

$$S = Q\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots + \frac{1}{z^{2n}}\right).$$

Was in der Klammer steht, ist eine geometrische Progression, deren erstes Glied $= \frac{1}{z}$, der Exponent auch $= \frac{1}{z}$ und die Anzahl der Glieder $= 2n$ ist. Es ist also die Summe dieser Reihe

$$= \frac{\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z^{2n}} - 1\right)}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1}\cdot\left(\frac{1}{z^{2n}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{z\left(\frac{1}{z} - 1\right)}\cdot\left(\frac{1}{z^{2n}} - 1\right) = \frac{1}{1-z}\cdot\left(\frac{1}{z^{2n}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{z-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{z^{2n}}\right).$$

Setzen wir jetzt $1+u = r$, so ist

$$z = (1+u)^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}},$$

also $z^{2n} = r^{\frac{1}{2}\cdot 2n} = r^n$,

folglich $\frac{1}{z^{2n}} = \frac{1}{r^n}$,

also ist die Summe der Progression auch $= \frac{1}{z-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$,

und daher $S = Q\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^n}\right)$.

Nun war oben §. 29. der baare Werth der jährlichen Rente oder

$$S = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right) = a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$= a\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Soll daher die halbjährliche Rente denselben Werth haben, also S in beiden Gleichungen einerlei sein, so muß

$$Q\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = a\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right),$$

sein. Da nun $1+u = r$, also $u = r-1$ ist, so ist

$$Q\cdot\frac{1}{z-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^n}\right) = a\cdot\frac{1}{r-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{r^n}\right).$$

Dividirt man die beiden Hauptglieder der Gleichung durch $1 - \frac{1}{r^n}$, so kommt

$$Q \cdot \frac{1}{z-1} = a \cdot \frac{1}{r-1},$$

also $$Q = \frac{a \cdot \frac{1}{r-1}}{\frac{1}{z-1}} = a \cdot \frac{1}{r-1} \cdot \frac{z-1}{1} = a \cdot \frac{z-1}{r-1},$$

d. h. man findet aus der jährlichen Rente die halbjährliche, wenn man erstere, nämlich a, mit $\frac{z-1}{r-1}$ multiplizirt. Nun war der Werth von $a = \frac{S}{\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}}$, folglich die halbjährliche Rente $Q = \frac{z-1}{r-1} \cdot \frac{S}{\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}}$. Man setze statt z und r wieder die Werthe, nämlich $z = (1+u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(1+u)}$ und $r = 1+u$, so ist

$$\frac{z-1}{r-1} = \frac{\sqrt{(1+u)}-1}{1+u-1} = \frac{\sqrt{(1+u)}-1}{u},$$

folglich $$Q = \frac{\sqrt{(1+u)}-1}{u} \cdot \frac{S}{\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}}$$

$$= \frac{S[\sqrt{(1+u)}-1]}{u \cdot \frac{1}{u} - u \cdot \frac{1}{u(1+u)^n}}$$

$$= \frac{S[\sqrt{(1+u)}-1]}{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}.$$

So wie auf diese Art die halbjährliche Rente bestimmt wird, wird auch die vierteljährliche, überhaupt $\frac{1}{m}$ jährliche, bestimmt, und obige Formel braucht nur in so fern verändert zu werden, daß man statt $\sqrt{(1+u)}$ setzt $\sqrt[4]{(1+u)}$, $\sqrt[m]{(1+u)}$, so daß die vierteljährliche Rente sein würde $\frac{S[\sqrt[4]{(1+u)}-1]}{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}$ und die $\frac{1}{m}$ jährliche $= \frac{S[\sqrt[m]{(1+u)}-1]}{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}$.

Ist die $\frac{1}{m}$ jährliche Rente $= Q$ gegeben, so läßt sich daraus wieder die Größe der Mise finden, denn, wenn

$$Q = \frac{S[\sqrt[m]{(1+u)} - 1]}{1 - \frac{1}{(1+u)^n}},$$

so ist $$Q\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right) = S[\sqrt[n]{(1+u)} - 1],$$

also $$\frac{Q\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)}{\sqrt[m]{(1+u)} - 1} = S.$$

Exempel.

Gegen eine Mise von 1000 thlr. erhält jemand eine halbjährliche Rente auf 20 Jahre; wie groß ist dieselbe, wenn 4 Prozent jährliche Zinsen gerechnet werden?

Antwort.

$$Q = \frac{S[\sqrt{(1+u)} - 1]}{1 - \frac{1}{(1+u)^{20}}} = \frac{1000(\sqrt{1{,}04} - 1)}{1 - \frac{1}{1{,}04^{20}}},$$

Es ist $\quad \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}0170333,$

also $\quad \text{Log. } \sqrt{1{,}04} = 0{,}0085166.$

Dazu gehört die Zahl 1,019803. Folglich ist

$$\sqrt{1{,}04} - 1 = 0{,}019803.$$

Dies mit 1000 multiplizirt, kommt 19,803.

Ferner ist $\quad 20 \cdot \text{Log. } 1{,}04 = 0{,}3406660.$

Dies abgezogen von $\quad \text{Log. } 1 = 1{,}0000000 - 1,$

bleibt $\quad 0{,}6593339 - 1.$

Die zugehörige Zahl ist 0,4563876. Also

$$1 - \frac{1}{1{,}04^{20}} = 0{,}5436123.$$

Nun ist $\quad \text{Log. } 19{,}803 = 1{,}2967310,$

abgezogen $\quad \text{Log. } 0{,}5436123 = 0{,}7352892 - 1,$

bleibt $\quad 1{,}5614418.$

Dazu gehört die Zahl 36,4285.

Berechnet man die jährliche Rente, so ist diese 73,5808, wovon die Hälfte $= 36{,}7904$, also um 0,3619 thlr. größer, als die wahre ist.

§. 32.

Wird die Rente a am Anfange des ersten, zweiten, dritten u. s. w. Jahres, also vorschußweise gezahlt, so ist die erste Rente als ein Kapital zu betrachten, das n Jahre, die zweite als ein Kapital, das $n-1$ Jahre u. s. w. aussteht. Es ist also

$$S(1+u)^n = a(1+u)^n + a(1+u)^{n-1} + \ldots + a.1.$$

Folglich ist

$$S = a\left(\frac{(1+u)^n}{(1+u)^n} + \frac{(1+u)^{n-1}}{(1+u)^n} + \ldots \frac{1}{(1+u)^n}\right),$$

oder

$$S = a\left(1 + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1+u)^2} + \ldots \frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Summirt man diese Reihe, in der das erste Glied $= 1$, der Exponent $= \frac{1}{1+u}$ ist, so ist die Summe

$$= \frac{1\left(\frac{1}{(1+u)^n} - 1\right)}{\frac{1}{(1+u)} - 1}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}{1 - \frac{1}{1+u}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}{\frac{1+u-1}{1+u}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(1+u)^n}}{\frac{u}{1+u}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right).(1+u)}{u}$$

$$= (1+u).\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right).$$

Also $S = (1+u)\,a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$.

Es ist aber $a\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right)$ der Werth der jährlichen Rente, wenn sie am Ende jedes Jahres gezahlt wird, multiplizirt man also diesen Werth mit $1+u$, so hat man den Werth der Vorschußrente.

Auf eben die Art findet man auch den Werth der Vorschußrente für $\frac{1}{m}$ Jahr, wenn man den Werth der am Ende des Termins zahlbaren mit $\sqrt[m]{(1+u)}$ multiplizirt, also

$$S = \frac{\sqrt[m]{(1+u)}\, Q\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)}{\sqrt[m]{(1+u)} - 1}.$$

§. 33.

Manchmal kann man z. B. in Handelsstädten sein Geld ununterbrochen auf kleine Termine nutzen. Man pflegt aber daselbst die halb-, oder viertel-, überhaupt die $\frac{1}{m}$ teljährlichen Zinsen nicht so zu rechnen, wie es oben gezeigt worden ist, sondern man nimmt, wie bei der einfachen Zinsrechnung $\frac{u}{2}$, $\frac{u}{4}$, $\frac{u}{m}$ für die Zinsen von $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{m}$ Jahr. In so fern man aber zusammengesetzte Zinsen annimmt, pflegt man den Werth der Renten auf folgende Art zu berechnen. Es werde z. B. der Werth der halbjährlichen Rente gesucht. Ist die jährliche Rente $= 1$, so ist die halbjährliche $= \frac{1}{2}$. Zahlt also der Entrepreneur am Ende des halben Jahres $\frac{1}{2}$, so hat er diese Summe ein halbes Jahr zu früh gezahlt; er berechnet also davon die Zinsen mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{2} = \frac{u}{4}$ und rechnet nun diese zum Werthe der jährlichen Rente 1 hinzu, läßt sich also eine etwas größere Mise zahlen, als es bei der jährlichen Rente der Fall gewesen wäre. Ist nun der Werth S der jährlichen Rente 1 auf n Jahre $= \frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}$, so läßt sich zeigen, daß der Werth der halbjährlichen Rente

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{2} \cdot \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u(1+u)^n}\right),$$

oder $\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{u}{4}\cdot\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u(1+u)^n}\right)$,

oder $\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4(1+u)^n}$,

oder $\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$ sei.

Zahlt nämlich der Entrepreneur am Ende des halben Jahres $\frac{1}{2}$, anstatt 1 am Ende jedes Jahres zu zahlen, so ist das so gut, als ob er jährlich $1+\frac{u}{4}$ zahlte. Es ist also der Werth dieser Zahlung auf n Jahre, oder

$$S=\frac{1+\frac{u}{4}}{1+u}+\frac{1+\frac{u}{4}}{(1+u)^2}+\frac{1+\frac{u}{4}}{(1+u)^3}+\cdots+\frac{1+\frac{u}{4}}{(1+u)^n}$$

$$=\left(1+\frac{u}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{(1+u)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Die Summe der in Klammer geschlossenen Reihe ist

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{u(1+u)^n}=\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right),$$

folglich ist

$$S=\left(1+\frac{u}{4}\right)\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{u}{4}\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$=\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right),$$

d. h. der Werth der halbjährlichen Rente wird gefunden, wenn man zum Werthe der jährlichen Rente 1 noch $\frac{1}{4}\cdot 1$, d. h. den vierten Theil der jährlichen Rente 1 weniger $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+u)^n}$ addirt.

Ist n eine große Zahl, so wird der Bruch $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+u)^n}$ sehr klein und kann also ohne großen Fehler weggelassen werden. Daher rechnet man bei halbjährlichen Terminen zu dem Werthe der jährlichen Rente gewöhnlich noch $\frac{1}{4}$ der Jahresrente hinzu, und setzt, wenn a die Jahresrente bedeutet, den Werth von

$$S=a\left[\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{1}{4}\cdot 1\right].$$

Bei der vierteljährlichen Rente zahlt man am Ende des ersten Vierteljahres $\frac{3}{4}\cdot\frac{u}{4}$, am Ende des zweiten $\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{4}$ und am Ende des dritten $\frac{1}{4}\cdot\frac{u}{4}$ zu viel. Am Ende des Jahres hat man also zu viel gezahlt

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{u}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{u}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{u}{4}=\frac{u}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{u}{4}\cdot\frac{6}{4}=u\cdot\frac{3}{8}.$$

Folglich ist der Zuschuß zum Werthe der jährlichen Rente auf n Jahre $=\frac{3}{8}\cdot u\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)=\frac{3}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$ und also der Werth der ganzen Jahresrente a, oder

$$S=a\left[\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{3}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)\right].$$

Ist n sehr groß, also $\frac{1}{(1+u)^n}$ sehr klein, so kann man beim Zuschusse den Bruch $-\frac{1}{(1+u)^n}$ weglassen, alsdann ist

$$S=a\left[\frac{1}{u}\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)+\frac{3}{8}\right],$$

d. h. der Werth der jährlichen Rente wird um $\frac{3}{8}$ dieser Rente vermehrt, wenn man vierteljährlich $\frac{1}{4}a$ zahlt. Behält man den Bruch im Zuschusse bei, so kann man $1-\frac{1}{(1+u)^n}$ als gemeinschaftlichen Faktor allein setzen, und dann ist

$$S=\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)\cdot\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{u}\right).$$

Bei $\frac{1}{m}$-teljährlichen Zahlungen gibt man beim ersten Termine $\frac{m-1}{m}\cdot\frac{u}{m}$, beim zweiten $\frac{m-2}{m}\cdot\frac{u}{m}$, beim dritten $\frac{m-3}{m}\cdot\frac{u}{m}$, beim mten $\frac{1}{m}\cdot\frac{u}{m}$ zu viel. Dies gibt also den Zuschuß für die n jährige Rente 1

$$=\frac{u}{m}\left(\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\frac{m-3}{m}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$=\frac{u}{m}\cdot\frac{1}{u}\left(\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\frac{m-3}{m}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\frac{m-3}{m}+\ldots+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Was in der ersten Klammer steht, ist eine arithmetische Progression, deren erstes Glied $= \frac{1}{m}$, das letzte $= \frac{m-1}{m}$ und die Zahl der Glieder $= m-1$ ist. Nach der Formel für die Summirung arithmetischer Progressionen ist also die Summe der Reihe $= \left(\frac{1}{m} + \frac{m-1}{m}\right) \cdot \frac{m-1}{2} = \frac{m-1}{2m} + \frac{(m-1)^2}{2m}$

$= \frac{m-1+m^2-2m+1}{2m} = \frac{m^2-m}{2m} = \frac{m-1}{2} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$.

Daher ist der Zuschuß zum Werthe der n jährigen Rente

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{m}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$= \left(\frac{m}{2m} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right).$$

Es ist also

$$S = a\left[\frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)\right]$$

$$= a\left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)\right].$$

Ist m eine große Zahl, so kann man den Bruch $\frac{1}{2m}$ weglassen, und dann ist

$$S = a\left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)\right].$$

Exempel.

Wie groß ist die Mise S, welche man einlegen muß, wenn man, 5 Prozent Zinsen gerechnet, eine jährliche Rente von 400 thlr., die aber vierteljährlich mit 100 thlr. ausgezahlt werden soll, 30 Jahre lang genießen will?

Der Werth von S ist nach dem Vorigen

$$= a\left[\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)\right]$$

$$= 400\left[\left(\frac{1}{0{,}05} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(0{,}05)^{30}}\right)\right]$$

$$= 400\left[\left(20 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}05^{30}}\right)\right]$$

$$= 400\left[\left(20 + \frac{3}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}05^{30}}\right)\right]$$

$$= 400\left[20{,}375 \cdot \left(1 - \frac{1}{1{,}05^{30}}\right)\right].$$

Den Bruch $\frac{1}{1{,}05^{30}}$ berechne man durch Logarithmen.

Es ist
$$\begin{aligned} \text{Log. } 1 &= 1{,}0000000-1, \\ 30 \cdot \text{Log. } 1{,}05 &= 0{,}6356790, \\ \text{Rest} &= 0{,}3643210-1. \end{aligned}$$

Zu diesem Logarithmen gehört die Zahl $0{,}2313774 = \frac{1}{1{,}05^{30}}$.

Also $1 - \frac{1}{1{,}05^{30}} = 0{,}7686225.$

Die Zahl wird mit 20,375 und mit 400 multipliziert. Die Rechnung mit Logarithmen ist

$$\begin{aligned} \text{Log. } 0{,}7686225 &= 0{,}8857131-1, \\ \text{Log. } 20{,}375 &= 1{,}3090976, \\ \text{Log. } 400 &= 2{,}6020600, \\ \text{Also Log. } S &= 3{,}7968707. \end{aligned}$$

Dazu gehört die Zahl 6264,272. Die Mise S ist folglich = 6264 thlr. 6 gr. 6 pf.

Wäre die Mise nach der §. 31. gegebenen Formel für S berechnet worden, so wäre sie etwas kleiner gekommen. Es war nämlich daselbst

$$S = \frac{Q\left(1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right)}{\sqrt[m]{(1+u)} - 1}.$$

In dieser Formel bedeutet Q die vierteljährliche Rente = 100.

Also $$S = \frac{100\left(1 - \frac{1}{1{,}05^{30}}\right)}{\sqrt[4]{1{,}05} - 1}.$$

Nach dem Vorigen ist $1 - \frac{1}{1{,}05^{30}} = 0{,}7686225$, folglich $100\left(1 - \frac{1}{1{,}05^{30}}\right) = 76{,}86225.$

$$\text{Log. } \sqrt[4]{1{,}05} = \frac{\text{Log. } 1{,}05}{4} = \frac{0{,}0211893}{4} = 0{,}0052973.$$

Dazu gehört die Zahl 1,012272 und davon 1 abgezogen, kommt 0,012272.

Nun dividire man 76,86225 durch 0,012272 vermittelst Logarithmen. Es ist

$$\begin{aligned} \text{Log. } 76{,}86225 &= 1{,}8857131, \\ \text{Log. } 0{,}012272 &= 0{,}0889153-2, \\ \text{bleibt Log. } S &= 3{,}7967978. \end{aligned}$$

Dazu gehört die Zahl 6263,221, also die Mise S = 6263 thlr. 5 gr. $3\frac{1}{2}$ pf.

Hätte man den Bruch $\frac{1}{2m} = \frac{1}{8}$ weggelassen, so wäre die Mise $S = a\left[\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(1+u)^n}\right)\right]$ gewesen

$$= 400\left[\left(\frac{1}{0{,}05}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{1{,}05^{30}}\right)\right]$$

$$= 400\left[(20+0{,}5)\cdot\left(1-\frac{1}{1{,}05^{30}}\right)\right]$$

$$= 400\cdot 20{,}5\cdot 0{,}7686225.$$

Die Rechnung vermittelst der Logarithmen ist

Log. 400	$= 2{,}6020600,$
Log. 20,5	$= 1{,}3117539,$
Log. 0,7686225	$= 0{,}8857131-1,$
Log. S	$= 3{,}7985270.$

Dazu gehört die Zahl 6288,21, also ist die Mise 6288 thlr. 5 gr. 1 pf., also ungefähr um 24 thlr. zu groß.

Wäre die Rente nur jährlich ausgezahlt worden, so wäre die Mise $S = a\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u(1+u)^n}\right)$ gewesen

$$= 400\left(\frac{1}{0{,}05}-\frac{1}{0{,}05\cdot 1{,}05^{30}}\right).$$

Es ist

Log. 0,05	$= 0{,}6989700-2,$
30. Log. 1,05	$= 0{,}6356790,$
	$0{,}3346490-1,$
Dieses Logar. abgezogen von Log. 1	$= 1{,}0000000-1,$
bleibt	$0{,}6653510.$

Dazu gehört die Zahl 4,627548. Diese von $\frac{1}{0{,}05} = 20$ abgezogen, bleibt 15,372452. Also

$S = 400\cdot 15{,}372452 = 6148{,}9808 = 6148$ thlr. 23 gr. $6\frac{1}{2}$ pf.

Sie ist also um 115 thlr. 7 gr. kleiner, als die Mise bei der vierteljährlichen Rente.

§. 34.

Es würde dieses Werk zu sehr ausdehnen, wenn wir von den bestimmten Zeitrenten noch ausführlicher handeln und noch mehr mögliche Fälle zu bestimmen suchen wollten. Wir wollen daher nur noch von solchen Zeitrenten sprechen, die an die lebenslängliche Dauer des Empfängers geknüpft sind, und insbesondere **Leibrenten** heißen. Es ist gerade nicht nöthig, daß ihre Dauer von dem Leben der Person abhängt, welche sie

zuerst empfängt; es kann auch bestimmt werden, daß die Rente nach dem Ableben der ersten Person noch an deren Erben fortbezahlt wird. Man denkt sich dann, daß der erste Empfänger noch bis zum Ende der Rente gelebt habe. Sie ist also auch in dem Falle noch eine einfache Leibrente. Zusammengesetzt ist sie aber, wenn sie von dem Leben mehrerer Personen abhängt, welche zusammen leben. In diesem Falle wird sie entweder nur so lange gezahlt, als die bestimmte Anzahl zusammen zu leben, oder sie dauert bis zum Lebensende der letzten Person aus der Gesellschaft fort. Im ersten Falle sind es Verbindungsrenten, im zweiten Lebensrenten. Sie können Jahresrenten, halb- und vierteljährliche Renten sein. Die ersteren sind die gewöhnlicheren und wir werden sie allemal verstehen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird.

Wüßte man gewiß, wie viel Jahre jemand in dem Alter, wo er sich eine Leibrente kauft, noch zu leben hat, so wäre die Mise dafür dem Werthe einer Zeitrente von so viel Jahren gleich. Allein diese Lebensdauer ist unbestimmt, demnach kann man sie nur nach einer gewissen Wahrscheinlichkeit berechnen, und dazu dienen die sogenannten Mortalitätstabellen, welche im Durchschnitt angeben, wie viel von einer gewissen Anzahl Zugleichgeborner in jedem Alter noch am Leben sind. Wir fügen eine solche Tabelle von Süßmilch mit der Baumannschen Berichtigung bei.

Alter.	Lebende im Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.
0 — 1	1000	250	15—16	511	4
1 — 2	750	89	16—17	507	4
2 — 3	661	43	17—18	503	4
3 — 4	618	25	18—19	499	4
4 — 5	593	14	19—20	495	4
5 — 6	579	12	20—21	491	5
6 — 7	567	11	21—22	486	5
7 — 8	556	9	22—23	481	5
8 — 9	547	8	23—24	476	5
9 —10	539	7	24—25	471	5
10—11	532	5	25—26	466	5
11—12	527	4	26—27	461	5
12—13	523	4	27—28	456	6
13—14	519	4	28—29	451	6
14—15	515	4	29—30	445	6

Alter.	Lebende im Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.	Alter.	Lebende im Anfange des Jahres.	Jährlicher Abgang.
30—31	439	6	64—65	172	10
31—32	433	6	65—66	162	10
32—33	427	6	66—67	152	10
33—34	421	6	67—68	142	10
34—35	415	6	68—69	132	10
35—36	409	7	69—70	122	10
36—37	402	7	70—71	112	9
37—38	395	7	71—72	103	9
38—39	388	7	72—73	94	9
39—40	381	7	73—74	85	8
40—41	374	7	74—75	77	8
41—42	367	7	75—76	69	7
42—43	360	7	76—77	62	7
43—44	353	7	77—78	55	6
44—45	346	7	78—79	49	6
45—46	339	7	79—80	43	6
46—47	332	8	80—81	37	5
47—48	324	8	81—82	32	4
48—49	316	8	82—83	28	4
49—50	308	8	83—84	24	4
50—51	300	9	84—85	20	3
51—52	291	9	85—86	17	3
52—53	282	9	86—87	14	2
53—54	273	9	87—88	12	2
54—55	264	9	88—89	10	2
55—56	255	9	89—90	8	2
56—57	246	9	90—91	6	1
57—58	237	9	91—92	5	1
58—59	228	9	92—93	4	1
59—60	219	9	93—94	3	1
60—61	210	9	94—95	2	1
61—62	201	9	95—96	1	1
62—63	192	10	96—97	0	0
63—64	182	10			

§. 35.

Aus solchen Mortalitätstabellen ergibt sich, wie viel in jedem Alter von einer gewissen Menge Zugleichgeborner im Durchschnitt noch leben. Am Ende des ersten Jahres leben

z. B. von 1000 Zusammenlebenden noch 750, am Ende des zweiten noch 668, am Ende des dritten noch 618, am Ende des *vierzigsten* noch 374 u. s. w. Es ist daraus offenbar, daß z. B. die Wahrscheinlichkeit, daß 1 von 1000 zugleichgebornen Kindern nicht ein Jahr alt werde, sich zu der, daß es bis zu dieser Zeit lebe, wie 1000 zu 750 verhalte. Eben so, wenn in einer Gegend 374 Personen, jede 40 Jahr alt, zusammen leben, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß einer von ihnen vor dem 41sten Jahre sterbe, zu der, daß er dasselbe erreiche, wie 374 zu 367. Es ist daher für einen 40 jährigen die Wahrscheinlichkeit, noch 1 Jahr zu leben $= \frac{367}{374}$,

" 2 " " " $= \frac{360}{374}$,

" 3 " " " $= \frac{353}{374}$,

" 20 " " " $= \frac{210}{374}$,

" 30 " " " $= \frac{125}{374}$,

" 50 " " " $= \frac{6}{374}$,

u. s. w.

Gesetzt also, es kaufen sich 374 vierzigjährige Personen eine jährliche Rente von 1 thlr. für die Person, so wird der Entrepreneur am Anfange des 42sten Jahres bloß zu zahlen haben 367 thlr.

" " " 43sten " " " " " 360 "

" " " 44sten " " " " " 253 "

" " " 62sten " " " " " 210 "

" " " 92sten " " " " " 6 "

Macht man sich also eine Tabelle aller mit jedem Jahre auszuzahlenden Renten bis zum höchsten menschlichen Alter, d. h. bis dahin, wo von allen 374 Personen keine mehr am Leben ist, diskontirt man alle diese Renten auf ihren gegenwärtigen Werth und addirt diese Werthe zusammen, so hat man den jetzigen baaren Werth des Kapitals gefunden, das mit Zinseszinsen in jährlichen Terminen an die Renteniere zu zahlen ist. Es ist also die Mise gefunden, welche die 374 Personen, deren jede eine Jahresrente von 1 thlr. haben will, zu zahlen haben, folglich auch die Mise einer jeden einzelnen. Daraus ergibt sich denn auch die Mise für jede andere Rente, weil die Mise für m thlr. offenbar auch m mal größer sein wird, als die für 1 thlr.

Wir wollen nun überhaupt die Zahl der in einem gewissen Alter q zusammenlebenden gleich alten Personen $= a$ setzen und die Zahl der davon noch zusammenlebenden, wenn sie 1, 2, 3,

4 . . . . n Jahre alter sind, durch ^1a, ^2a, ^3a, ^4a, ^na bezeichnen, so ist der jetzige baare Werth der Jahresrente 1

für das Alter $q+1 = \frac{^1a}{a} \cdot \frac{1}{1+u} = \frac{1}{a} \cdot \frac{^1a}{1+u}$,

" " " $q+2 = \frac{^2a}{a} \cdot \frac{1}{(1+u)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{^2a}{(1+u)^2}$,

" " " $q+3 = \frac{^3a}{a} \cdot \frac{1}{(1+u)^3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{^3a}{(1+u)^3}$,

" " " $q+4 = \frac{^4a}{a} \cdot \frac{1}{(1+u)^4} = \frac{1}{a} \cdot \frac{^4a}{(1+u)^4}$,

" " " . . . .

" " " . . . .

" " " . . . .

" " " $q+n = \frac{^na}{a} \cdot \frac{1}{(1+u)^n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{^na}{(1+u)^n}$,

wo u die schon bekannte Bedeutung hat, nämlich den angenommenen Zinsfuß bezeichnet.

Ist nun S der jetzige baare Werth aller dieser Renten zusammen, so ist

$$S = \frac{1}{a}\left(\frac{^1a}{1+u} + \frac{^2a}{(1+u)^2} + \frac{^3a}{(1+u)^3} + \frac{^4a}{(1+u)^4} + \ldots + \frac{^na}{(1+u)^n}\right)$$

Die Zahlen a, ^1a, ^2a u. s. w. findet man in der Sterblichkeitstabelle, wenn das Alter gegeben ist. Ist z. B. $a = 374$, so ist $^1a = 367$, $^2a = 360$, $^3a = 353$ u. s. w. Man kann also jedes einzelne Glied der Reihe berechnen und die gefundenen Resultate zusammen addiren. Die Summe ist der jetzige Werth des Kapitals, also die Mise für die Jahresrente 1, in welche sich die mit a bezeichneten Personen zu theilen haben.

Wenn man das Alter jemandes von dem höchsten Lebensziel, das er nach der Tabelle erreichen kann, also von 96, wo von den 1000 zugleich gebornen Kindern, keins mehr lebt, abzieht, so heißt der Rest die Altersergänzung, welche z. B. für das Alter von 20 Jahren = 76 ist. Von den 491 20jährigen Personen wird also eine noch 76, eine andere noch 75, eine dritte noch 74 Jahre leben. Daraus läßt sich die mittlere Lebensdauer für jedes Alter bestimmen. Es geschehe dies z. B. für einen 40jährigen. Im Alter 40 leben

374 Personen beisammen, im Alter 41 noch 367, im Alter 42 noch 360 u. s. w. Addirt man nun diese Zahlen: 367, 360, 353 u. s. w. bis zum höchsten Alter zusammen und dividirt die Summe durch 374, d. h. vertheilt man die Summe aller Jahre unter 374 vierzigjährige Personen, so findet sich das arithmetische Mittel derselben oder die mittlere Lebensdauer. Die erwähnte Summe ist 8279, also die mittlere Lebensdauer des 40 jährigen $= \frac{8279}{374} = 22{,}136$. Hieraus ergibt sich die allgemeine Regel: Die mittlere Lebensdauer für ein gegebenes Alter wird gefunden, wenn man die Zahl der Lebenden vom höchsten möglichen Alter an, also von 96 nach der Tabelle, bis zu dem Alter zusammen addirt, das um 1 größer ist, als das gegebene und die Summe durch die Zahl der Lebenden im gegebenen Alter dividirt. Hierbei ist zu bemerken, daß diese Zahl nur richtig ist, wenn man annimmt, daß die im Laufe eines Jahres Sterbenden alle am Anfange desselben mit Tode abgehen. Da dies aber nicht ist, sondern Einige im Anfange, Andere in der Mitte, noch Andere gegen das Ende sterben, so rechnet man lieber so, als ob alle bis zur Mitte, also $\frac{1}{2}$ Jahr länger gelebt hätten, als angenommen war. Deswegen addirt man zur gefundenen mittleren Lebensdauer noch $\frac{1}{2}$ und so wäre also die verbesserte mittlere Lebensdauer der 40 jährigen $= 22{,}636$.

§. 36.

Folgende Tabelle dient, die mittlere Lebensdauer und die Leibrente für jedes Alter zu berechnen. Es sind 4 Prozent Zinsen angenommen und die jährliche Rente $= 1$ gesetzt.

A. Alter.	B. Lebende und zugleich Summe d. in jedem Jahre zu zahlenden Renten.	C. Jetziger baarer Werth der Zahlen in B zu 4 Prozent.	D. Summen d. Zahlen in B, vom Ende der Tabelle an bis zu jedem Alter addirt.	E. Mittlere Lebensdauer.	F. Summen der baaren Werthe in C, vom Ende der Tabelle bis zu jedem Alter addirt.
0	1000	1000	28988	28,49	12431,48
1	750	721,15	27988	36,72	11431,48
2	661	611,13	27238	40,71	10710,33
3	618	549,40	26577	42,50	10099,20
4	593	506,90	25959	43,28	9549,80
5	579	475,90	25366	43,31	9042,90

A. Alter.	B. Lebende und zugleich Summe d. in jedem Jahre zu zahlenden Renten.	C. Jetziger baarer Werth der Zahlen in B zu 4 Prozent.	D. Summen d. Zahlen in B, vom Ende der Tabelle an bis zu jedem Alter addirt.	E. Mittlere Lebensdauer.	F. Summen der baaren Werthe in C, vom Ende der Tabelle bis zu jedem Alter addirt.
6	567	448,11	24787	43,22	8567,00
7	556	422,51	24220	43,06	8118,89
8	547	399,69	23664	42,76	7696,38
9	539	378,69	23117	42,39	7296,69
10	532	349,50	22578	41,94	6918,00
11	527	342,33	22046	41,33	6558,60
12	523	326,66	21519	40,65	6216,27
13	519	311,70	20996	39,96	5889,61
14	515	297,40	20477	39,26	5577,91
15	511	283,74	19962	38,56	5280,51
16	507	270,69	19451	37,86	4996,77
17	503	258,23	18944	37,16	4726,08
18	499	246,32	18441	36,46	4467,85
19	495	234,95	17942	35,75	4221,53
20	491	224,09	17447	35,03	3986,58
21	486	213,27	16956	34,39	3762,49
22	481	202,96	16470	33,74	3549,22
23	476	193,13	15989	33,09	3346,26
24	471	183,75	15513	32,44	3153,13
25	466	174,80	15042	31,78	2969,38
26	461	166,28	14576	31,12	2794,58
27	456	158,15	14115	30,45	2628,30
28	451	150,40	13659	29,79	2470,15
29	445	142,69	13208	29,18	2319,75
30	439	135,35	12763	28,57	2177,06
31	433	128,37	12324	27,96	2041,71
32	427	121,72	11891	27,35	1913,34
33	421	115,39	11464	26,73	1791,62
34	415	109,37	11043	26,11	1676,23
35	409	103,65	10628	25,49	1566,86
36	402	97,95	10219	24,92	1463,21
37	395	92,55	9817	24,35	1365,26
38	388	87,41	9422	23,78	1272,71
39	381	82,53	9034	23,21	1185,30
40	374	77,90	8653	22,64	1102,77

A. Alter	B. Lebende und zugleich Summe d. in jedem Jahre zu zahlenden Renten.	C. Jetziger baarer Werth der Zahlen in B zu 4 Prozent.	D. Summen d. Zahlen in B, vom Ende der Tabelle bis zu jedem Alter addirt.	E. Lebenszeit dauer.	F. Summen der baaren Werthe in C, vom Ende der Tabelle bis zu jedem Alter addirt.
41	367	73,50	8279	22,06	1024,87
42	360	69,33	7912	21,48	951,37
43	353	65,36	7552	20,89	882,04
44	346	61,60	7199	20,31	816,68
45	339	58,04	6853	19,72	755,08
46	332	54,65	6514	19,12	697,04
47	324	51,28	6182	18,58	642,39
48	316	48,09	5858	18,04	591,11
49	308	45,07	5542	17,49	543,02
50	300	42,21	5234	16,95	497,95
51	291	39,37	4934	16,46	455,74
52	282	36,69	4643	15,96	416,37
53	273	34,15	4361	15,48	379,68
54	264	31,75	4088	14,98	345,53
55	255	29,49	3824	14,50	313,78
56	246	27,36	3569	14,01	284,29
57	237	25,34	3323	13,52	256,93
58	228	23,44	3086	13,04	231,59
59	219	21,65	2858	12,55	208,15
60	210	19,96	2639	12,07	186,60
61	201	18,37	2429	11,58	166,54
62	192	16,87	2228	11,10	148,17
63	182	15,38	2036	10,69	131,30
64	172	13,98	1854	10,28	115,92
65	162	12,66	1682	9,88	101,94
66	152	11,42	1520	9,50	89,28
67	142	10,26	1368	9,13	77,86
68	132	9,17	1226	8,79	67,60
69	122	8,15	1094	8,47	58,43
70	112	7,19	972	8,18	50,28
71	103	6,36	860	7,85	43,09
72	94	5,58	757	7,55	36,73
73	85	4,85	663	7,30	31,15
74	77	4,23	578	7,01	26,30
75	69	3,64	501	6,76	22,07

A. Alter.	B. Lebende und zugleich Summe d. in jedem Jahre zu zahlenden Renten.	C. Jetziger baarer Werth der Zahlen in B zu 4 Prozent.	D. Summen d. Zahlen in B, vom Ende der Tabelle an bis zu jedem Alter addirt.	E. Mittlere Lebensdauer.	F. Summen der baaren Werthe in C, vom Ende der Tabelle bis zu jedem Alter addirt.
76	62	3,15	432	6,47	18,43
77	55	2,68	370	6,23	15,28
78	49	2,30	315	5,93	12,60
79	43	1,94	266	5,69	10,30
80	37	1,61	223	5,53	8,36
81	32	1,33	186	5,31	6,75
82	28	1,12	154	5,00	5,42
83	24	0,93	126	4,75	4,30
84	20	0,74	102	4,60	3,37
85	17	0,61	82	4,32	2,63
86	14	0,48	65	4,14	2,02
87	12	0,40	51	3,75	1,54
88	10	0,32	39	3,40	1,14
89	8	0,24	29	3,12	0,82
90	6	0,18	21	3,00	0,58
91	5	0,14	15	2,50	0,40
92	4	0,11	10	2,00	0,26
93	3	0,08	6	1,50	0,15
94	2	0,05	3	1,00	0,07
95	1	0,02	1	0,50	0,02

Diese Tabelle enthält in der Kolumne A das Lebensalter und in B die in jedem Alter Lebenden nach Süßmilch. Die Kolumne C ist so entstanden. Die Zahl der Lebenden in B bezeichnet zugleich die Summe der Renten, jede = 1 thlr., welche an die Lebenden jedes Alters von dem Entrepreneur gezahlt werden müssen, also am Ende des ersten Jahres 750 thlr., am Ende des zweiten 661 thlr., am Ende des dritten 618 thlr. u. s. w. Diese Summen werden auf ihren jetzigen baaren Werth zurückgebracht, also 750 durch die Formel $750 \cdot \frac{1}{1+u}$; 661 durch $661 \cdot \frac{1}{(1+u)^2}$; 618 durch $618 \cdot \frac{1}{(1+u)^3}$ u. s. w. Es kommen die Zahlen 721,15; 611,13; 549,40 u. s. w., wenn man die Zinsen zu 4 Prozent rechnet. Alle diese baaren Werthe machen also die Kolumne C aus. Die Kolumne D entsteht, wenn man die Zahlen in B vom Ende der Tabelle an bis zu

dem Alter, das um 1 größer ist, als das, bei welchem die Zahl steht, zusammen addirt. So ist z. B. 27988 die Summe aller Zahlen in B vom Ende an bis 661; 19451 die Summe aller Zahlen vom Ende an bis 503; 8279 die Summe aller Zahlen vom Ende an bis 360 u. s. w. Dividirt man in diese so gefundenen Summen mit der Zahl, die bei dem gegebenen Alter steht, also bei dem, welches um 1 kleiner ist, als dasjenige, dem in der Tabelle die Summe gegenüber steht, so erhält man die mittlere Lebensdauer, wenn man noch ½ oder 0,5 dazu addirt. Diese ist in der Kolumne E enthalten. Will man z. B. für das Alter 15 die mittlere Lebensdauer suchen, so dividirt man mit der bei 15 in B stehenden Zahl 511 in die Summe der Reihe D, welche bei dem Jahre 16 steht, also in 19451 und addirt dazu noch 0,5. Die Kolumne F endlich enthält die Summen aller baaren Werthe in der Kolumne C, z. B. 8567,00 ist die Summe aller Zahlen in C von 448,11 an bis zu Ende; 3762,49 die Summe aller Zahlen in C von 213,27 an bis zu Ende u. s. w. Aus dieser Kolumne findet man den jetzigen baaren Werth der Jahresrente 1 für Eine Person von gegebenem Alter, oder die Mise, welche sie um die jährliche Leibrente 1 zu haben, in einem gewissen Alter einlegen muß. Man suche nämlich in der Kolumne F die Zahl, welche bei dem um 1 Jahr größern Alter steht, und dividire sie durch die Zahl in der Kolumne C, die bei dem gegebenen Alter steht. Will man z. B. die Mise für das Alter von 20 Jahren haben, so dividirt man die in F bei 21 Jahr stehende Zahl 3762,49 durch die in C bei 20 Jahr stehende 224,09; der Quotient 16,79 ist die Mise, welche eine 20 jährige Person für die Leibrente 1 einzuzahlen hat, wenn man 4 Prozent rechnet. In den Kolumnen C und F sind nur zwei Dezimalstellen berechnet, welches die Misen, wenn die Renten über 100 gehen, freilich etwas unrichtig gibt. Für solche Fälle muß man genauere Tabellen verfertigen, die wenigstens bis auf fünf Dezimalstellen gehen.

Daß man auf diese Art die Mise findet, erhellet so:

Im Jahre 20 sind 491 Lebende, dies trägt eine Rente von 491 thlr., deren baarer Werth ist $\frac{491}{(1+u)^{20}} = 224{,}09$. Die folgenden Zahlen in C sind $\frac{1a}{(1+u)^{21}}$, $\frac{2a}{(1+u)^{22}}$, $\frac{3a}{(1+u)^{23}}$ u. s. w. Nun ist die Zahl beim Jahre 21 in der Kolumne F $= \frac{1a}{(1+u)^{21}} + \frac{2a}{(1+u)^{22}} + \frac{3a}{(1+u)^{23}} + \ldots + \frac{75a}{(1+u)^{95}}$.

Dividirt

Dividirt man also diese Zahl durch den baaren Werth der Rente des zwanzigsten Jahres, so erhält man die einzelne Mise, welche für die Rente 1 von Einem gezahlt werden muß. Es ist diese Regel auch einerlei mit der §. 35. für S gefundenen Formel. Es war nämlich dort

$$S = \frac{1}{a}\left(\frac{{}^{1}a}{1+u} + \frac{{}^{2}a}{(1+u)^2} + \frac{{}^{3}a}{(1+u)^3} + \ldots + \frac{{}^{n}a}{(1+u)^n}\right).$$

Nun ist $\frac{{}^{1}a}{1+u} = \frac{{}^{1}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{21}}$,

$\frac{{}^{2}a}{(1+u)^2} = \frac{{}^{2}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{22}}$ u. s. w., also

$$\frac{1}{a}\left(\frac{{}^{1}a}{(1+u)} + \frac{{}^{2}a}{(1+u)^2} + \frac{{}^{3}a}{(1+u)^3} + \ldots\ldots + \frac{{}^{n}a}{(1+u)^n}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{{}^{1}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{21}} + \frac{{}^{2}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{22}} + \frac{{}^{3}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{23}} + \ldots \frac{{}^{n}a(1+u)^{20}}{(1+u)^{20+n}}\right)$$

$$= \frac{1}{a}(1+u)^{20}\left(\frac{{}^{1}a}{(1+u)^{21}} + \frac{{}^{2}a}{(1+u)^{22}} + \frac{{}^{3}a}{(1+u)^{23}} + \ldots \frac{{}^{n}a}{(1+u)^{20+n}}\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{a}{(1+u)^{20}}}\left(\frac{{}^{1}a}{(1+u)^{21}} + \frac{{}^{2}a}{(1+u)^{22}} + \frac{{}^{3}a}{(1+u)^{23}} + \ldots \frac{{}^{n}a}{(1+u)^{20+n}}\right).$$

Nun ist a für das Jahr 20 = 491 und $\frac{a}{(1+u)^{20}}$ = dem baaren Werthe der Rente 491, also = 224,09, folglich muß man das in der Klammer stehende mit $\frac{1}{224,09}$ multipliziren, oder durch 224,09 dividiren, um die Mise zu erhalten.

§. 37.

Man kann auch die Mise für ein gewisses Alter ziemlich nahe finden, wenn man eine Zeitrente für die mittlere Lebensdauer, die dem gegebenen Alter korrespondirt, berechnet, und da man annehmen kann, daß die Leibrenten in demselben Verhältnisse stehen, wie die Zeitrenten auf die mittlere Lebensdauer, so braucht man nur Eine Leibrente auf die oben angezeigte Art zu berechnen, so wird sich jede andere aus dem Verhältnisse der mittleren Lebensdauer bestimmen lassen. Es ist

z. B. die mittlere Lebensdauer eines 50-jährigen nach der obigen Tabelle = 16,95. Man berechne also eine Zeitrente auf 16,95 Jahre. Zu 4 Prozent ist die Mise für die Rente 1 = 12,1355. Nun ist die Mise für die Leibrente 1 eines 50-jährigen = 10,7961. Folglich verhält sich die Mise für die Zeitrente eines 50-jährigen zur Mise für die Leibrente desselben, wie 12,1355 : 10,7961, oder wie 1 : 0,890. Sieht man dies Verhältniß für allgemein gültig an, welches aber nur beinahe wahr ist, so läßt sich aus der Einen bekannten Mise der Leibrente und der Zeitrente für die mittlere Lebensdauer die Mise für jede andere Leibrente finden. Es ist z. B. für das Alter von 15 Jahren die mittlere Lebensdauer = 38,56 Jahr, die Mise für diese Zeitrente = 19,4892. Also setzt man auf 1 : 0,890 = 19,4892 : Mise für die gesuchte Leibrente. Die Rechnung gibt 17,3454, aber die wirkliche Mise ist 17,6104, also der Unterschied = 0,265.

Andere Näherungsmethoden übergehen wir. Dagegen ist noch zu bemerken, daß, wenn z. B. die Summe derer, die von einem Alter sind und welchen Leibrenten gezahlt werden sollen, nicht gerade die Zahl ist, welche mit der Menge der Lebenden bei dem gegebenen Alter in der Sterblichkeitstabelle übereinstimmt, man durch Regeldetrie finden könne, wie viel davon im folgenden und jedem andern Jahre noch am Leben sind. Will man z. B. wissen, wie viel von 100 40-jährigen im 41sten Jahre noch leben, so ist die Proportion 374 : 367 = 100 : Zahl der Lebenden. Es kommen 98,1. Das Resultat ist auch nur im Durchschnitt wahr.

Soll die Mise einer Leibrente nach einem gewissen Zinsfuße in eine andere nach einem andern Zinsfuße verwandelt werden, so suche man die Mise einer Zeitrente für die mittlere Lebensdauer des gegebenen Alters nach beiden Zinsfußen und mache dann die Proportion: Die Mise der Zeitrente nach dem ersten Zinsfuße verhält sich zu der nach dem zweiten, wie die Mise der Leibrente nach dem ersten zur Mise der Leibrente nach dem zweiten. Es sei die Mise für die Leibrente 1 für einen 35-jährigen, zu 4 Prozent gerechnet, = 14,1175. Die mittlere Lebensdauer für das Alter von 35 Jahren ist 25,49 Jahr; die Mise der Zeitrente für so viele Jahre zu 4 Prozent = 15,7989, zu 5 Prozent aber = 14,2318, so hat man die Proportion

15,7989 : 14,2318 = 14,1175 : 12,717.

Die Zahl 12,717 ist also die gesuchte Mise.

§. 38.

Soll eine Leibrente nicht sogleich, sondern erst nach einer bestimmten Zahl von Jahren gezahlt (laufend) werden, so heißt sie eine aufgeschobene. Fängt die Leibrente zwar sogleich an, hört aber mit einer bestimmten Zahl von Jahren auf, z. B. Renten für Waisen, die nur bis zu einem bestimmten Alter gezahlt werden, so heißt sie eine aufhörende. Eine aufgeschobene kann auch zugleich eine aufhörende Leibrente sein. Werden von einer Leibrente einige Termine nicht gezahlt, sondern bei der Kasse gelassen, um mit ihren Zinsen und Zinseszinsen zum Vortheil des Rentenirers aufbewahrt zu werden, so heißt sie eine aufgesparte Leibrente. Die Zahl der Jahre kann im Voraus bestimmt sein, oder unbestimmt bleiben und vom Willen des Rentenirers abhängen. Im letztern Falle heißt sie eine ruhende Leibrente. Was durch das Aufsparen gesammelt wird, kann dem Rentenirer entweder auf einmal ausgezahlt, oder zur Vergrößerung der nachherigen Leibrente gebraucht werden. Im letztern Falle ist es eine wachsende Leibrente.

Aufgabe.

Den baaren Werth einer auf m Jahren aufgeschobenen Leibrente, oder die Mise dafür zu finden.

Es ist, wenn das Alter der Person, von der die Mise gezahlt wird, $= c$ und die Zahl der Lebenden in diesem Alter $= a$ ist, die Mise S für die sogleich anfangende Leibrente

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{{}_1a}{1+u} + \frac{{}_2a}{(1+u)^2} + \ldots \frac{{}_ma}{(1+u)^m} + \frac{{}_{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \ldots + \frac{{}_na}{(1+u)^n}\right)$$

Da nun aber in den ersten m Jahren nichts ausgezahlt wird, so ist die Mise für die aufgeschobene Leibrente oder

$$S' = \frac{1}{a}\left(\frac{{}_{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{{}_{m+2}a}{(1+u)^{m+2}} + \ldots + \frac{{}_na}{(1+u)^n}\right).$$

Nun ist aber die Mise der Leibrente für das Alter $c+m$, wenn die Zahl der Lebenden in diesem Alter $= {}_ma$ ist, oder

$$S = \frac{1}{{}_ma}\left(\frac{{}_{m+1}a}{1+u} + \frac{{}_{m+2}a}{(1+u)^2} + \frac{{}_{m+3}a}{(1+u)^3} + \ldots + \frac{{}_na}{(1+u)^{n-m}}\right).$$

Auf beiden Seiten mit $(1+u)^m$ dividirt, kommt

$$\frac{S}{(1+u)^m} = \frac{1}{\overline{m}a}\left(\frac{\overline{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{\overline{m+2}a}{(1+u)^{m+2}} + \ldots + \frac{\overline{n}a}{(1+u)^n}\right).$$

Multiplizirt man nun auf beiden Seiten mit $\frac{\overline{m}a}{a}$, so kommt

$$\frac{S}{(1+u)^m}\cdot\frac{\overline{m}a}{a} = \frac{\overline{m}a}{a}\cdot\frac{1}{\overline{m}a}\left(\frac{\overline{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{\overline{m+2}a}{(1+u)^{m+2}} + \ldots + \frac{\overline{n}a}{(1+u)^n}\right),$$

oder

$$\frac{S}{(1+u)^m}\cdot\frac{\overline{m}a}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{\overline{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{\overline{m+2}a}{(1+u)^{m+2}} + \ldots + \frac{\overline{n}a}{(1+u)^n}\right) = S'.$$

Da nun $\frac{1}{a}\left(\frac{\overline{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{\overline{m+2}a}{(1+u)^{m+2}} + \ldots \frac{\overline{m}a}{(1+u)^n}\right) = S'$,

oder der gesuchte Werth der aufgeschobenen Leibrente und S der Werth der Leibrente für das Alter $c+m$ ist, so findet man ersteren, wenn man S durch $(1+u)^m$ dividirt, d. h. auf den Werth zurückbringt, den es m Jahre vorher hatte und die gefundene Größe mit $\frac{\overline{m}a}{a}$, d. h. mit dem Quotienten der im Alter $c+m$ Lebenden dividirt durch die Anzahl derer, welche im Alter c noch am Leben sind, multiplizirt. Es ist also

$$S' = \frac{S}{(1+u)^m}\cdot\frac{\overline{m}a}{a}.$$

Exempel.

Eine 20-jährige Person kauft sich eine Leibrente, die sie erst nach 16 Jahren genießen will; wie groß ist die dafür zu zahlende Miſe?

Hier ist $c = 20$, $m = 16$, also $c+m = 36$. Man suche nun S oder die Leibrente für das Alter $c+m$. Diese findet man, 4 Prozent Zinsen gerechnet, $= 13{,}9379$. Diese durch $(1+u)^{16}$ dividirt, d. h. auf den Werth, den sie im Alter 20 hat, zurückgebracht, kommt 7,4414. Nun leben im Alter $20 = c$ noch 491 Personen $= a$ und im Alter $c+m$ oder 36 noch $402 = \overline{m}a$. Also muß man den Werth 7,4414

mit $\frac{402}{491}$ multipliziren, das Produkt ist 6,092 gleich dem Werthe der aufgeschobenen Leibrente.

Da $\overset{m}{\frown}a = a - a + \overset{m}{\frown}a = a - (a - \overset{m}{\frown}a)$, so ist

$$S' = \frac{S}{(1+u)^m} \cdot \frac{\overset{m}{\frown}a}{a} = \frac{S}{(1+u)^m} \cdot \frac{a - (a - \overset{m}{\frown}a)}{a}$$

$$= \frac{S}{(1+u)^m} \cdot \left(1 - \frac{a - \overset{m}{\frown}a}{a}\right).$$

Diese Formel läßt sich noch bequemer rechnen. Es ist $\frac{S}{(1+u)^m} = 7{,}4414$ und $a = 491$, $\overset{m}{\frown}a = 402$, also

$1 - \frac{491-402}{491} = 1 - \frac{89}{491} = 1 - 0{,}1812 = 0{,}8187$,

also $S = 7{,}4414 \cdot 0{,}8187 = 6{,}092$.

Aus der obigen Tabelle läßt sich S' durch eine einzige Division finden. Nimmt man a für die Anfangszahl in der Tabelle beim Alter c, so ist in der Kolumne F die Zahl bei dem Jahre c+m+1 allemal $= \frac{\overset{m+1}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+1}} + \frac{\overset{m+2}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+2}} + \frac{\overset{m+3}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+3}} \cdots$

in der Kolumne C aber ist die Zahl beim Alter c $= \frac{a}{(1+u)^c}$.

Dividirt man daher mit dieser Zahl in jene Summe, so ist der

$$\text{Quotient} = \frac{\frac{\overset{m+1}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+1}} + \frac{\overset{m+2}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+2}} + \cdots}{\frac{a}{(1+u)^c}}$$

$$= \frac{1}{\frac{a}{(1+u)^c}} \cdot \left(\frac{\overset{m+1}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+1}} + \frac{\overset{m+2}{\frown}a}{(1+u)^{c+m+2}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\overset{m+1}{\frown}a \cdot (1+u)^c}{(1+u)^{c+m+1}} + \frac{\overset{m+2}{\frown}a \cdot (1+u)^c}{(1+u)^{c+m+2}} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{\overset{m+1}{\frown}a}{(1+u)^{m+1}} + \frac{\overset{m+2}{\frown}a}{(1+u)^{m+2}} + \cdots\right),$$

d. h. gleich dem Werthe der aufgeschobenen Leibrente oder S'. Das obige Beispiel würde also nach der Tabelle so gerechnet. Die Zahl bei dem Alter $c + m + 1 = 20 + 16 + 1 = 37$ ist 1365,26 und die Zahl bei dem Alter c in der Kolumne C, also bei 20 ist 224,09, also $S' = \frac{1365,26}{224,09} = 6,0924$ in den ersten drei Dezimalstellen mit der obigen einerlei. Man rechne also das Alter der Person, die Zeit des Aufschubs und 1 zusammen, suche in F die bei diesem Alter stehende Zahl und dividire sie durch die Zahl in C, welche bei dem Alter der Person steht. Der Quotient ist die gesuchte Miss.

§. 39.

Soll eine Leibrente nur m Jahre lang dauern und dann aufhören, so ist ihr Werth gleich dem Unterschiede des Werthes der bis an das Lebensende dauernden vollen Leibrente und der bis auf m Jahre aufgeschobenen Leibrente für dasselbe Alter. Ist S der Werth der vollen, S' der Werth der aufgeschobenen und s der Werth der aufhörenden, so ist $s = S - S'$.

Wenn c das Alter ist, wo die Rente gekauft wird, und a die Anzahl der Lebenden in diesem Alter, m das Alter, wo sie aufhören soll, und ^{m}a die Zahl der Lebenden in demselben, ^{n}a aber die Zahl der Lebenden im letzten Jahre der Rente, so ist nach dem Obigen die volle Rente

$$S = \frac{1}{a}\left(\frac{^{1}a}{1+u} + \frac{^{2}a}{(1+u)^2} + \frac{^{3}a}{(1+u)^3} + \ldots + \frac{^{m}a}{(1+u)^m} + \frac{^{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \ldots \frac{^{n}a}{(1+u)^n}\right)$$

Von dieser Formel wird für die aufhörende Rente nur der erste Theil $= \frac{1}{a}\left(\frac{^{1}a}{1+u} + \frac{^{2}a}{(1+u)^2} + \ldots \frac{^{m}a}{(1+u)^m}\right)$ berechnet und der folgende Theil $\frac{1}{a}\left(\frac{^{m+1}a}{(1+u)^{m+1}} + \ldots \frac{^{n}a}{(1+u)^n}\right)$ ist der Werth der m Jahre aufgeschobenen Leibrente. Es ist also offenbar $s = S - S'$. Will eine 20-jährige Person eine Leibrente haben, die nach 16 Jahren aufhören soll, so ist der Werth der vollen Leibrente (4 Prozent gerechnet) oder $S = 16,7905$;

der Werth der auf 16 Jahre aufgeschobenen Leibrente, oder S′ ist = 6,0923, also

$$s = S - S' = 16{,}7905 - 6{,}0923 = 10{,}6882.$$

§. 40.

Wenn jemand eine Leibrente = 1 kauft, diese aber in den ersten m Jahren nicht genießen will, sondern wünscht, daß ihm oder einem Andern am Ende der m Jahre eine gewisse Summe dafür ausgezahlt werde, so ist der baare Werth dieser Summe gleich dem baaren Werthe einer nach m Jahren aufhörenden Leibrente, der Betrag der Summe selbst aber gleich dem Werthe der nach m Jahren aufhörenden Leibrente mit ihren Zinsen und Zinseszinsen.

Es bezahlt nämlich A die Mise für eine volle Leibrente, also S, hätte aber nur für eine auf m Jahre aufgeschobene oder S′ bezahlen sollen, er bezahlt also $S - S'$ zu viel und da $S - S' = s$, so bezahlt er den Werth einer nach m Jahren aufhörenden Leibrente zu viel und dies Kapital s trägt nun m Jahre lang Zinsen und Zinseszinsen, also ist es in m Jahren auf $s(1+u)^m$ angewachsen, es ist daher $s(1+u)^m$ die Summe, die nach m Jahren ausgezahlt wird. Im vorigen Beispiele war s oder $S - S' = 10{,}6882$, also ist bei 4 Prozent die nach 16 Jahren zahlbare Summe $= 10{,}6882 \cdot 1{,}04^{16} = 20{,}0187$.

Soll der Werth der aufgeschobenen Leibrente beim Tode des Renteniers ausgezahlt werden, so wird der Werth, den sie alsdann hat, so berechnet.

Es genießt z. B. A die jährlichen Zinsen eines Kapitals C, welches nach dem Tode des A an B fällt. In dem Alter c will A die Ansprüche des B abkaufen; wie viel muß er ihm geben?

Offenbar nicht das ganze Kapital C, sondern weniger. Wüßte A, wie lange er noch lebte, z. B. noch m Jahre, so würde B mit einer Summe a befriedigt sein, die vom Augenblicke der Auszahlung an mit Zinsen und Zinseszinsen in m Jahren zu einem Kapitale anwüchse, das dem Kapital C gleich wäre. Dieser Werth von a wäre $= \frac{C}{(1+u)^m}$. Aber A weiß nicht, wie lange er lebt. Indessen wird sowohl A als B befriedigt sein, wenn der erstere an den letztern so viel zahlt, als übrig bleibt, wenn man von C den baaren Werth einer Leibrente abzieht, welche dem A bis an seinen Tod eine jährliche Ein-

nahme verschafft, die den jährlichen Zinsen vom Kapital gleich ist; denn alsdann ist es für A so gut, als ob er wirklich noch bis an seinen Tod die Zinsen vom Kapital C genösse und B kann das ihm baar ausgezahlte Geld so nützen, daß es bei dem Tode des A zu einer Summe angewachsen ist, die dem Kapitale C gleich ist, wenn nämlich A so lange lebt, daß die Summe, welche B empfängt, in der Zeit so hoch steigen kann. Es hängt also von den Umständen ab, ob B bei diesem Handel verlieren oder gewinnen soll.

Es sei z. B. A 50 Jahr alt, wo er dem B seine Ansprüche auf ein Kapital von 10000 thlr. abkaufen will. Zu 4 Prozent trägt das Kapital jährlich 400 thlr. Zinsen. Was also A von diesem Kapitale behalten muß, ist der baare Werth einer Leibrente für einen 50-jährigen, die ihm jährlich 400 thlr. einbringt. Das übrige wird er an B auszahlen. Nun ist nach §. 35. der Werth der Leibrente 1 für einen 50-jährigen, wenn man sie nach der dort angeführten Regel berechnet, $= \frac{455{,}74}{42{,}21}$ $= 10{,}7961$. Der Werth der Leibrente 400 ist also 400 mal größer, folglich $= 4318{,}44$. Diese Summe muß A behalten; er wird also an B zahlen $10000 - 4318{,}44 = 5681{,}56$ thlr. Lebt ungefähr A noch $14\frac{1}{2}$ Jahr, so wächst die Summe, welche B erhält, mit Zinsen und Zinseszinsen wieder zu 10000 thlr. an. Zur Erleichterung dieser Rechnung dient folgende Tabelle.

Werth der beim Tode einer Person zahlbaren Summe 1, wie er für jedes Alter der Person Statt findet.

Zinsen zu 4 Prozent.

Alter.	Werthe.	Alter.	Werthe.	Alter.	Werthe.
0	0,5247				
1	0,4059	11	0,2736	21	0,3343
2	0,3390	12	0,2788	22	0,3400
3	0,3047	13	0,2842	23	0,3469
4	0,2864	14	0,2898	24	0,3536
5	0,2799	15	0,2956	25	0,3605
6	0,2753	16	0,3016	26	0,3677
7	0,2714	17	0,3079	27	0,3752
8	0,2698	18	0,3145	28	0,3830
9	0,2693	19	0,3213	29	0,3897
10	0,2700	20	0,3284	30	0,3966

Alter.	Werthe.	Alter.	Werthe.	Alter.	Werthe.
31	0,4038	51	0,5770	71	0,7690
32	0,4112	52	0,5860	72	0,7768
33	0,4189	53	0,5953	73	0,7833
34	0,4270	54	0,6047	74	0,7912
35	0,4353	55	0,6145	75	0,7977
36	0,4425	56	0,6243	76	0,8058
37	0,4499	57	0,6345	77	0,8124
38	0,4576	58	0,6449	78	0,8210
39	0,4655	59	0,6555	79	0,8278
40	0,4737	60	0,6663	80	0,8319
41	0,4823	61	0,6774	81	0,8379
42	0,4911	62	0,6888	82	0,8473
43	0,5002	63	0,6986	83	0,8547
44	0,5097	64	0,7083	84	0,8587
45	0,5196	65	0,7179	85	0,8671
46	0,5298	66	0,7273	86	0,8722
47	0,5389	67	0,7364	87	0,8849
48	0,5484	68	0,7451	88	0,8964
49	0,5581	69	0,7532	89	0,9053
50	0,5682	70	0,7604	90	0,9086

Diese Tabelle kann man auch in dem Falle brauchen, wenn jemand von seiner Leibrente nichts genießen, sondern dafür bei seinem Tode einem Andern eine von der Kasse zu zahlende Summe hinterlassen will. Es kaufe sich z. B. A von 40 Jahren eine Leibrente, so ist der baare Werth derselben im Alter 40 = 13,1565; wer nun beim Tode eines 40-jährigen 1 genießen will, zahlt dafür jetzt 0,4737 laut der Tabelle, also hat man nach der Regel de tri den Aufsatz:

$$0{,}4737 : 13{,}1565 = 1 ; x,$$

folglich $$x = \frac{13{,}1565}{0{,}4737} = 27{,}7740.$$

Will jemand durch den Nichtgenuß der gekauften Rente sich in einem gewissen Alter eine größere Rente verschaffen und ist im voraus festgesetzt, wie lange die Rente aufgeschoben bleiben soll, so verhält sich die so gewachsene Rente zu der sogleich laufenden, wie der baare Werth der letztern zum baaren Werthe der erstern, weil offenbar die Renten im Verhältnisse der baaren Werthe stehen müssen, die man dafür zahlt.

Eine Person von 20 Jahren kauft sich eine volle Leibrente

= 1 und zahlt dafür 13,9379; sie will sie aber erst nach 16 Jahren genießen, also so lange aufschieben. Nun ist der Werth einer 16 Jahre aufgeschobenen Leibrente 1 für einen 20-jährigen = 6,093, folglich verhält sich

$$6{,}093 : 13{,}9379 = 1 : x,$$

und es ist $$x = \frac{13{,}9379}{6{,}093} = 2{,}287.$$

§. 41.

Eine Verbindungsrente entsteht, wenn zweien oder mehreren Personen eine Rente so lange ausgezahlt wird, als sie noch zusammen am Leben sind. Es hängt also der baare Werth derselben von der wahrscheinlichen Dauer des Zusammenlebens zweier oder mehrerer Personen ab.

Aus der Sterblichkeitstabelle wird sich nach Wahrscheinlichkeit bestimmen lassen, wie viel von einer gewissen Anzahl N zusammenlebender Personen am Ende jedes Jahres noch vorhanden sind. Es kommt dabei natürlich auf das Alter der Personen in dem Jahre an, wo sie die Verbindung schließen. Es sei also, um zuerst von zwei Personen zu sprechen, die eine C vom Alter c und die andere D vom Alter d. Ist nun die Zahl der Lebenden vom Alter c = a, so ist sie im folgenden Jahre $c+1 = {}^{1}a$, im dritten Jahre $c+2 = {}^{2}a$ u. s. w. bis für das Alter $c+x$, wo x die Altersergänzung zu c bedeutet, keiner mehr am Leben, also ${}^{x}a = 0$ ist. Eben so leben von den b Lebenden im Alter d im folgenden Jahre oder $d+1$ noch ${}^{1}b$, im Alter $d+2$ noch ${}^{2}b$ u. s. w. bis im Alter $d+y$, wo y die Altersergänzung zu d bedeutet, keiner mehr am Leben, also ${}^{y}b = 0$ ist. Wie viel daher in jedem Jahre aus N Personen vom Alter c noch leben, findet man durch den Schluß: So wie sich die in den Mortalitätstabellen angegebene ganze Zahl der Lebenden vom Alter c verhält zur Zahl N, so verhält sich die Zahl der aus den Mortalitätstabellen in jedem Jahre bekannten Zahl der Lebenden zu denen, die von N noch leben. Bezeichnet man diese letztere Zahl für das Ende des ersten Jahres durch ${}^{1}N$, für das Ende des zweiten durch ${}^{2}N$ u. s. w., so hat man die Proportionen:

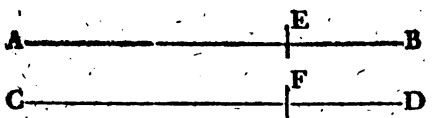
$$a : N = {}^{1}a : {}^{1}N,$$
$$a : N = {}^{2}a : {}^{2}N,$$
$$a : N = {}^{3}a : {}^{3}N,$$
u. s. w.

Es ist also $^1N = N.\frac{^1a}{a}$,

$^2N = N.\frac{^2a}{a}$,

$^3N = N.\frac{^3a}{a}$,

u. s. w.



Nun mögen die Linien AB und CD die angenommnen N Personen vom Alter c und d bezeichnen, und da die Personen in CD mit denen in AB immer ein Paar zusammen ausmachen, so mögen sie in beiden Linien so gestellt sein, daß immer die zusammengehörigen sich gegenüber befinden, wie z. B. die Personen E und F. Von der Linie AB mögen nun am Ende des ersten Jahres noch AE leben und EB gestorben sein, so ist $AE = N.\frac{^1a}{a}$. Wäre aus der Linie CD keiner gestorben, so gäbe es offenbar noch so viel Paare, als in AE leben, also auch $N.\frac{^1a}{a}$ Paare. Eben dasselbe wäre auch der Fall, wenn aus CD gerade die gestorben wären, die zu den in AB Gestorbenen gehörten, oder mit ihnen ein Paar ausmachten. Es läßt sich aber keines von beiden annehmen, sondern, wenn aus AB die in EB befindlichen gestorben sind, so werden aus CD einige zwischen C und F und einige zwischen F und D gestorben sein. Aber wie viel auch zwischen F und D noch leben, so geben doch diese mit denen in EB keine Paare mehr, da in EB alle todt sind. Es sind also nur noch so viel Paare da, als in AE leben, weniger der Zahl der zwischen C und F Gestorbenen. Diese Zahl läßt sich so finden. Es leben von b Personen, die das Alter d haben, am Anfange des Alters $d+1$ noch ^1b, also ist die Zahl der Gestorbenen $= b - {}^1b$. Um also zu berechnen, wie viel von den in CF oder AE (weil $AE = CF$) Lebenden gestorben sind, kann man so schließen: Von b gehen in Einem Jahre ab $b - {}^1b$, wie viel gehen ab von $N.\frac{^1a}{a}$, denn $N.\frac{^1a}{a}$ ist die Zahl der in AE Lebenden,

wenn man die Zahl der in AB Lebenden $= N$ setzt, also hat man die Proportion

$$b : b - {}^{1}b = N . \frac{{}^{1}a}{a} : R,$$

und es ist die gesuchte Zahl

$$R = N . \frac{{}^{1}a(b - {}^{1}b)}{ab}.$$

Es ist daher die Zahl der noch wirklich vorhandenen Paare

$$= N . \frac{{}^{1}a}{a} - N . \frac{{}^{1}a(b - {}^{1}b)}{ab}$$

$$= N\left(\frac{{}^{1}a}{a} - \frac{{}^{1}a(b - {}^{1}b)}{ab}\right)$$

$$= N\left(\frac{{}^{1}a}{a} - \frac{{}^{1}a}{a} . \frac{b - {}^{1}b}{b}\right)$$

$$= N\left[\frac{{}^{1}a}{a} - \left(\frac{{}^{1}a}{a} . \frac{b}{b} + \frac{{}^{1}a}{a} . \frac{-{}^{1}b}{b}\right)\right]$$

$$= N\left[\frac{{}^{1}a}{a} - \left(\frac{{}^{1}a}{a} . \frac{b}{b} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b}{ab}\right)\right]$$

$$= N\left[\frac{{}^{1}a}{a} - \left(\frac{{}^{1}a}{a} . 1 - \frac{{}^{1}a}{a} . \frac{{}^{1}b}{b}\right)\right]$$

$$= N\left(\frac{{}^{1}a}{a} - \frac{{}^{1}a}{a} + \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b}{ab}\right) = N . \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b}{ab}.$$

Ganz durch dieselben Schlüsse findet man die Zahl der am Ende des zweiten Jahres noch vorhandenen Paare $= N . \frac{{}^{2}a\,{}^{2}b}{ab}$, die am Ende des dritten $= N . \frac{{}^{3}a\,{}^{3}b}{ab}$ u. s. w., also überhaupt die Zahl der Paare am Ende des nten Jahres $= N . \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}$, bis endlich $N . \frac{{}^{x}a\,{}^{y}b}{ab} = 0$ wird, je nachdem ${}^{x}a$ oder ${}^{y}b = 0$ ist.

Wie viel Paare leben z. B. noch von 100 Paaren, wenn der Eine, C, ein Alter von 30, der Andere, D, von 20 Jahren hat, am Ende des ersten, zweiten, dritten, zwanzigsten, funfzigsten Jahres?

Nach Süßmilchs Tabelle ist

für das Alter 30 die Zahl der Lebenden $= 439 = a$,
" " " 31 " " " " $= 433 = {}^{1}a$,
" " " 32 " " " " $= 427 = {}^{2}a$,

für das Alter 33 die Zahl der Lebenden = 421 = ^{1}a,
" " " 50 " " " " = 300 = ^{20}a,
" " " 80 " " " " = 37 = ^{10}a.

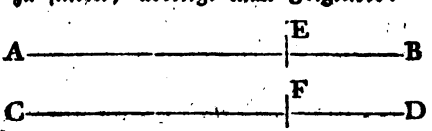
Ferner

für das Alter 20 die Zahl der Lebenden = 491 = b,
" " " 21 " " " " = 486 = ^{1}b,
" " " 22 " " " " = 481 = ^{2}b,
" " " 23 " " " " = 476 = ^{3}b,
" " " 40 " " " " = 374 = ^{20}b,
" " " 70 " " " " = 112 = ^{50}b.

Es sind daher von 100 Paaren noch vorhanden am Ende des
1sten Jahres nach der Verbindung noch $\frac{433 \cdot 486}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 98$,
2ten " " " " " $\frac{427 \cdot 481}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 96$,
3ten " " " " " $\frac{421 \cdot 476}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 93$,
20sten " " " " " $\frac{300 \cdot 374}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 52$,
50sten " " " " " $\frac{37 \cdot 112}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 1\text{-}2$.

§. 42.

Um die Zahl der aus N ganz ausgestorbenen Paare für jedes Jahr zu finden, überlege man Folgendes:



Es mögen wieder die Linien AB und CD die angenommnen N Personen vom Alter c und d, wie im vorigen Paragraphen bezeichnen und die Individuen in beiden mögen eben so, wie oben, zu Paaren vereinigt sein. Nun mögen in AB alle Personen zwischen E und B ausgestorben und die in CD mit ihnen verbunden gewesenen Personen zwischen F und D sich befinden, so ist wiederum klar, daß, wenn die Gestorbenen von CD sich alle in FD befänden und dieses, nach der Voraussetzung, eben so viel Individuen als EB enthalten hätte, so wäre die Zahl der ganz ausgestorbenen Paare = EB. Aber es werden in CF eben so gut als in FD einige gestorben sein. Die in CF Gestorbenen geben keine ganz ausgestorbenen Paare, weil die mit ihnen verbundenen in AE noch leben. Eben so sind nicht alle in FD todt, also gibt es auch nicht so viel ausgestorbene Paare, als in EB todt sind. Daher ist die Zahl derselben nur so groß, als die Zahl der Todten in FD. Nun

sind von a Lebenden nach n Jahren $a - \frac{n}{a}$ gestorben; wie viel also aus N gestorben sind, ergibt sich durch die Proportion:

$$a : a - \frac{n}{a} = N : T,$$

folglich $$T = N \cdot \frac{a - \frac{n}{a}}{a}.$$

Da ferner von b Lebenden nach n Jahren gestorben sind $b - \frac{n}{b}$, so erfährt man, wie viel aus $FD = EB = N \cdot \frac{a - \frac{n}{a}}{a}$ gestorben sind, durch die Proportion:

$$B : b - \frac{n}{b} = N \cdot \frac{a - \frac{n}{a}}{a} : T',$$

also $$T' = N \cdot \frac{(a - \frac{n}{a})(b - \frac{n}{b})}{ab},$$

und dies ist folglich die Zahl der ganz ausgestorbenen Paare. Man findet also dieselben, wenn man die Zahl der Gestorbenen im Alter $c + n$ und im Alter $d + n$ mit einander multiplizirt, das Produkt durch die Zahl der Lebenden im Alter c, multiplizirt mit der Zahl der Lebenden im Alter d, dividirt und den Quotienten mit der angenommnen Zahl der ursprünglichen Paare multiplizirt.

Wie viel z. B. sind von 100 Paaren nach 20 Jahren ganz ausgestorben, wenn der Eine, C, ein Alter von 30, der Andere, D, von 20 Jahren hat?

Es ist die Zahl der Lebenden

im Alter 30 = 439 = a,
" " 50 = 300 = $\frac{n}{a}$,
" " 20 = 491 = b,
" " 40 = 374 = $\frac{n}{b}$.

Also ist $$T' = \frac{(439 - 300)(491 - 374)}{439 \cdot 491} \cdot 100$$

$$= \frac{139 \cdot 117}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 7.$$

Nach 20 Jahren sind also von 100 Paaren wahrscheinlich 7 Paare ganz ausgestorben.

§. 43.

Will man die Zahl der getrennten Paare bestimmen, so muß man unterscheiden, ob C oder D noch am Leben ist, will

as Alter beider verschieden angegeben wurde. Da wir annehmen, daß in EB alle gestorben sind, so gibt es, wenn C noch am Leben ist, so viel getrennte Paare, als die Zahl der Gestorbenen in CD zwischen C und F beträgt. Wie viel nämlich aus N Personen vom Alter c nach n Jahren noch leben, ergibt sich durch die Proportion $a : {}^{n}a = N : L$,

also $$L = N.\frac{{}^{n}a}{a}.$$

Diese Zahl bezeichnet die in AE Lebenden und also auch die in CF Lebenden, wenn keiner aus CF gestorben wäre. Nun sind aber auch aus CF Einige gestorben, und aus FD leben noch Einige. Da wir aber nur die Zahl der getrennten Paare wissen wollen, wenn C, d. h. einer aus AB noch lebt, so gehen uns die Lebenden in FD nichts an; es kommt also nur darauf an, wie viel in CF gestorben sind. Nun sind nach n Jahren aus b gestorben $b - {}^{n}b$, also erhält man, wie viel aus CF, d. h. von $\frac{{}^{n}a}{a}.N$ $\left(\text{denn } CF = AE = N.\frac{{}^{n}a}{a}\right)$ gestorben sind, durch die Proportion

$$b : b - {}^{n}b = N.\frac{{}^{n}a}{a} : L',$$

folglich $$L' = N.\frac{{}^{n}a(b - {}^{n}b)}{ab},$$

und dies ist also die Zahl der getrennten Paare, wenn C noch lebt.

Lebt dagegen D noch, so wird die Zahl der getrennten Paare durch die in FD noch Lebenden bestimmt. Wenn aber nach n Jahren von b noch ${}^{n}b$ leben, so leben noch von N, wie oben, $N.\frac{{}^{n}b}{b}$, und daher wird die Zahl der getrennten Paare, wo D noch lebt, $= N.\frac{(a - {}^{n}a){}^{n}b}{ab}$ sein.

Sind von N Paaren nach n Jahren noch übrig $N.\frac{{}^{n}a.{}^{n}b}{ab}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser Paare nach n Jahren noch da sei $= \frac{N.{}^{n}a.{}^{n}b}{N.ab} = \frac{{}^{n}a.{}^{n}b}{ab}$.

Sind nach n Jahren von N Paaren N. $\frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$ ganz ausgestorben, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser Paare ganz gestorben sein wird $= \frac{N.(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{N.ab}$

$= \frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$.

Eben so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von einem getrennten Paare C noch lebe $= \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{N.ab} = \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab}$ und die Wahrscheinlichkeit, daß D noch lebe $= \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab}$.

Setzen wir wieder, wie oben, das Alter von C = 30, das von D = 20, N = 100 und fragen wir nach der Zahl der getrennten Paare, wenn 20 Jahre seit der Verbindung verflossen sind, so ist ${}^{n}a = {}^{50}a$ und ${}^{n}b = {}^{40}b$. Lebt also C noch, so ist die Zahl der getrennten Paare $= \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab}$

$= \frac{300(491-374)}{439\cdot 491}.100 = \frac{300\cdot 117}{439\cdot 491}.100 = 16$, und wenn D noch lebt, $= \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab} = \frac{374(439-300)}{439\cdot 491}.100 =$

$\frac{374\cdot 139}{439\cdot 491}.100 = 24$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß C noch lebt, ist $= \frac{16}{100} = 0{,}16$, und die, daß D noch am Leben ist, $= \frac{24}{100} = 0{,}24$. Beide Wahrscheinlichkeiten verhalten sich also zu einander, wie 16 : 24, oder wie 2 : 3. Es waren also im zwanzigsten Jahre nach der Verbindung von 100 Paaren noch 52 Paare am Leben und 8 Paare ganz ausgestorben. Von 16 Paaren lebte C und von 24 Paaren D noch. Addirt man alle diese Zahlen zusammen, so muß die anfängliche Zahl der Paare wieder herauskommen, wirklich ist $52+8+16+24 = 100$.

§. 44.

Die mittlere Dauer des Zusammenlebens zweier Personen vom Alter c und d, oder die mittlere Verbindungsdauer wird gefunden, wenn man die in jedem Jahre übrigen Paare zusammen

summen addirt, und die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt.

Ist N die anfängliche Zahl der Paare, so sind

am Ende des 1sten Jahres noch vorhanden $\frac{N.{}^{1}a\,{}^{1}b}{ab}$,

" " " 2ten " " " $\frac{N.{}^{2}a\,{}^{2}b}{ab}$,

" " " 3ten " " " $\frac{N.{}^{3}a\,{}^{3}b}{ab}$,

u. s. w.

Die Summe aller Paare ist also

$$N.\frac{{}^{1}a\,{}^{1}b}{ab}+N.\frac{{}^{2}a\,{}^{2}b}{ab}+N.\frac{{}^{3}a\,{}^{3}b}{ab}+N.\frac{{}^{4}a\,{}^{4}b}{ab}+\ldots+\ldots$$

Dividirt man diese Summe durch N, so ergibt sich die mittlere Verbindungsdauer zweier Personen

$$=\frac{{}^{1}a\,{}^{1}b+{}^{2}a\,{}^{2}b+{}^{3}a\,{}^{3}b+{}^{4}a\,{}^{4}b+\ldots+\ldots}{ab}$$

Wir wollen dieselbe durch M bezeichnen.

Summirt man eben so die Zahl der getrennten Paare für jedes Jahr und dividirt die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare, so erhält man die mittlere Dauer des Überlebens der einen Person über die andere mit ihr verbundene.

Ist C am Leben und D todt, so ist die Zahl der getrennten Paare am Ende des

$$\text{1sten Jahres} = N.\frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b)}{ab},$$

$$\text{2ten} \quad " \quad = N.\frac{{}^{2}a(b-{}^{2}b)}{ab},$$

$$\text{3ten} \quad " \quad = N.\frac{{}^{3}a(b-{}^{3}b)}{ab},$$

u. s. w.

bis man endlich zum höchsten Lebensziele von C gelangt, oder zu $\frac{{}^{x}(b-{}^{x}b)}{ab}$, wo ${}^{x}a = o$ und also noch mehr die folgenden Glieder $\frac{{}^{x+1}a}{ab}$ u. s. w. $= o$ werden. Es bedeutet nämlich

x, wie oben, die Altersergänzung von C. Es iſt daher die mittlere Dauer des Überlebens, wenn D ſtirbt,

$$= \frac{N.{}^{1}a({}^{1}b - {}^{1}b) + N.{}^{2}a({}^{2}b - {}^{2}b) + \ldots + N.{}^{x}a({}^{x}b - {}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a({}^{1}b - {}^{1}b) + {}^{2}a({}^{2}b - {}^{2}b) + {}^{3}a({}^{3}b - {}^{3}b) + \ldots + {}^{x}a({}^{x}b - {}^{x}b)}{ab}.$$

Eben ſo, wenn D der Überlebende iſt, iſt die mittlere Dauer dieſes Überlebens

$$= \frac{{}^{1}b({}^{1}a - {}^{1}a) + {}^{2}b({}^{2}a - {}^{2}a) + {}^{3}b({}^{3}a - {}^{3}a) + \ldots + {}^{y}b({}^{y}b - {}^{y}b)}{ab},$$

wo y die Altersergänzung von D bedeutet und alſo ${}^{y}b = o$ wird.

Die mittlere Zeit, wo ein Paar ganz ausgeſtorben ſein muß, nämlich nach x Jahren, wenn x die Altersergänzung der jüngern Perſon bedeutet, weil dann, wenn die jüngere Perſon nach Erreichung des höchſten wahrſcheinlichen Alters nicht mehr am Leben iſt, dies auch von der ältern nicht mehr Statt finden kann, wird gefunden, wenn man die für jedes Jahr ganz ausgeſtorbenen Paare bis zur Altersergänzung x zuſammen addirt und die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt. Heißt dieſe mittlere Zeit O, ſo iſt

$$O = \frac{N(a - {}^{1}a)(b - {}^{1}b) + N(a - {}^{2}a)(b - {}^{2}b) + \ldots + N(a - {}^{x}a)(b - {}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{(a - {}^{1}a)(b - {}^{1}b) + (a - {}^{2}a)(b - {}^{2}b) + \ldots + (a - {}^{x}a)(b - {}^{x}b)}{ab}.$$

Addirt man alle dieſe vier mittleren Zeiten, nämlich die mittlere Dauer der Verbindung $= N.\frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von C $= \frac{N.{}^{n}a({}^{n}b - {}^{n}b)}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von D $= \frac{N.{}^{n}b({}^{n}a - {}^{n}a)}{ab}$ und die mittlere Zeit des Ganzausgeſtorbenſeins $= \frac{N({}^{n}a - {}^{n}a)({}^{n}b - {}^{n}b)}{ab}$,

so ist die ganze Summe so groß, als die Altersergänzung des jüngern Lebens.

Es ist nämlich für jedes nte Jahr und für jedes einzelne Paar die Summe dieser vier Größen

$$= \frac{N \cdot {}^{n}a\,{}^{n}b}{N \cdot ab} + \frac{N \cdot {}^{n}a(b - {}^{n}b)}{N \cdot ab} + \frac{N \cdot {}^{n}b(a - {}^{n}a)}{N \cdot ab} + \frac{N(a - {}^{n}a)(b - {}^{n}b)}{N \cdot ab}$$

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab} + \frac{{}^{n}a(b - {}^{n}b)}{ab} + \frac{{}^{n}b(a - {}^{n}a)}{ab} + \frac{(a - {}^{n}a)(b - {}^{n}b)}{ab}.$$

Multiplizirt man in den Zählern die Faktoren wirklich mit einander, so ist die Summe

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ab - {}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ba - {}^{n}b\,{}^{n}a + ab - {}^{n}ab - a\,{}^{n}b + {}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}.$$

Hebt man alles, was sich heben läßt, so kommt $\frac{ab}{ab} = 1$, und da dieser Werth für jedes Jahr gilt, so ist für alle x Jahre, d. h. für die Altersergänzung der jüngern Person, die Summe $= x \cdot 1 = x$, d. h. gleich der Altersergänzung.

Ist eine von diesen vier Größen gefunden worden, so lassen sich daraus die drei übrigen bestimmen.

Ist z. B. die Verbindungsdauer berechnet, so wird die Dauer des Überlebens von C über D so gefunden.

Es ist nach Oben die Dauer dieses Überlebens für die einzelne Person

$$= \frac{{}^{1}a(b - {}^{1}b) + {}^{2}a(b - {}^{2}b) + {}^{2}a(b - {}^{2}b) + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Daraus wird durch Multiplikation der Faktoren

$$\frac{{}^{1}ab - {}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}ab - {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{2}ab - {}^{2}a\,{}^{2}b + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Nimmt man nun die positiven Größen und die negativen, jede Sorte allein, zusammen, so kommt

$$\frac{{}^{1}ab + {}^{2}ab + {}^{2}ab + \ldots}{ab} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + \ldots}{ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{2}a + \ldots}{a} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + \ldots}{ab}.$$

Nun ist aber $\frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{2}a + \ldots}{a}$ gleich der mittleren Lebensdauer einer Person von gegebenem Alter, welche wir

$= Ec$ setzen wollen und $\frac{{}^{1}a{}^{1}b + {}^{2}a{}^{2}b + {}^{3}a{}^{3}b + \ldots}{ab}$ ist die oben gefundene Formel für die mittlere Verbindungsdauer zweier Personen, welche wir M genannt haben. Also ist die Dauer des Überlebens von C über D $= Ec - M$.

Ist D die überlebende Person, so wird die mittlere Dauer des Überlebens derselben auf eben die Art gefunden

$$= \frac{{}^{1}b + {}^{2}b + {}^{3}b + \ldots}{b} - \frac{{}^{1}a{}^{1}b + {}^{2}a{}^{2}b + {}^{3}a{}^{3}b + \ldots}{ab},$$

also gleich der mittleren Lebensdauer von D, die wir $= Ed$ setzen wollen, weniger der mittleren Verbindungsdauer von C und D, also $= Ed - M$.

Die mittlere Zeit z des Ganzausgestorbenseins war für jedes einzelne Paar

$$= \frac{(a - {}^{1}a)(b - {}^{1}b) + (a - {}^{2}a)(b - {}^{2}b) + (a - {}^{3}a)(b - {}^{3}b) + \ldots}{ab}.$$

Durch die Multiplikation der Faktoren erhält man

$$\frac{ab - {}^{1}ab - a{}^{1}b + {}^{1}a{}^{1}b + ab - {}^{2}ab - a{}^{2}b + {}^{2}a{}^{2}b + ab - {}^{3}ab - a{}^{3}b + {}^{3}a{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

Nimmt man wieder die positiven und negativen Größen, jede Sorte für sich, zusammen, so bekommt man

$$\frac{ab + ab + ab + \ldots}{ab} - \frac{a{}^{1}b + a{}^{2}b + a{}^{3}b + \ldots}{ab} - \frac{b{}^{1}a + b{}^{2}a + b{}^{3}a + \ldots}{ab} + \frac{{}^{1}a{}^{1}b + {}^{2}a{}^{2}b + {}^{3}a{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

Nun ist $\frac{ab + ab + ab + \ldots}{ab} = 1 + 1 + 1 + \ldots$ und so fort bis zum höchsten Alter, also die ganze Summe gleich der Altersergänzung x der jüngern Person. Ferner ist $\frac{a{}^{1}b + a{}^{2}b + a{}^{3}b + \ldots}{ab} = \frac{{}^{1}b + {}^{2}b + {}^{3}b + \ldots}{b}$, d. h. gleich der mittleren Lebensdauer der Person $D = Ed$ und $\frac{b{}^{1}a + b{}^{2}a + b{}^{3}a + \ldots}{ab} = \frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots}{a}$, d. h. gleich der mittleren Lebensdauer der Person $C = Ec$. Endlich ist $\frac{{}^{1}a{}^{1}b + {}^{2}a{}^{2}b + {}^{3}a{}^{3}b + \ldots}{ab}$ gleich der mittleren Verbin-

bungsdauer von C und D = M. Daher ist die mittlere Zeit des Ganzausgestorbenseins oder $z = x - (Ed + Ec) + M$.

Alle vier Größen zusammen geben endlich x oder das Ergänzungsalter der jüngsten Person.

Zu bemerken ist, daß zu der mittleren Verbindungsdauer noch $\frac{1}{2}$ addirt werden muß, weil, wie die gefundene Formel voraussetzt, die Trennungen der Paare nicht alle im Anfange, sondern in jedem Zeitpunkte des Jahres geschehen, welches also so viel ist, als ob alle in der Mitte des Jahres geschähen. Es ist daher die mittlere Verbindungsdauer

$$= \frac{{}^1a\,{}^1b + {}^2a\,{}^2b + {}^3a\,{}^3b + \ldots}{ab} + \tfrac{1}{2}.$$

§. 45.

Auf diesen verschiedenen Sätzen gründen sich die mancherlei Renten, welche sich auf die Verbindung zweier Personen beziehen. Die mittlere Verbindungsdauer gibt die Eherente, die mittlere Zeit des Überlebens der einen oder andern Person des verbundenen Paares die Wittwer- und Wittwenrente, und die mittlere Zeit des Ganzausgestorbenseins eine Waisenrente.

Unter Verbindungsrente zweier Personen (Eherente) verstehen wir eine Rente, die so lange ausgezahlt wird, als zwei Personen zusammen leben. Das Alter beider Personen muß gegeben sein, wenn sie sich einkaufen. Dann ist der baare Werth einer solchen Verbindungsrente

$$= \frac{\frac{{}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \frac{{}^4a\,{}^4b}{(1+u)^4} + \ldots}{ab}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \frac{{}^4a\,{}^4b}{(1+u)^4} + \ldots\right).$$

Die Richtigkeit erhellet eben so wie bei den einfachen Leibrenten.

Eine Rente des Überlebens (Wittwenrente bei Eheleuten) ist eine Rente, welche nach dem Tode einer von zwei verbundenen Personen der andern bis zu ihrem Tode gezahlt wird. Ihr Werth ist, wenn C für die überlebende angenommen wird,

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1a\,(b - {}^1b)}{1+u} + \frac{{}^2a\,(b - {}^2b)}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,(b - {}^3b)}{(1+u)^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1ab - {}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2ab - {}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3ab - {}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left[\frac{{}_1ab}{1+u} + \frac{{}_2ab}{(1+u)^2} + \frac{{}_3ab}{(1+u)^3} + \cdots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{ab}\left[b\left(\frac{{}_1a}{1+u} + \frac{{}_2a}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{{}_1a}{1+u} + \frac{{}_2a}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{ab}\left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$

= der Leibrente von C weniger der Verbindungsrente von C und D.

Soll D überleben, so ist der Werth der Rente

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}_1b(a - {}_1a)}{1+u} + \frac{{}_2b(a - {}_2a)}{(1+u)^2} + \frac{{}_3b(a - {}_3a)}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}_1ba - {}_1a{}_1b}{1+u)} + \frac{{}_2ba - {}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3ba - {}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\left[\frac{{}_1ba}{1+u} + \frac{{}_2ba}{(1+u)^2} + \frac{{}_3ba}{(1+u)^3} + \cdots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{ab}\left[a\left(\frac{{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{b}\left(\frac{{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{ab}\left(\frac{{}_1a{}_1b}{1+u} + \frac{{}_2a{}_2b}{(1+u)^2} + \frac{{}_3a{}_3b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$

d. h. gleich der Leibrente von D, weniger der Verbindungsrente von C und D.

Eine Rente des Ganzausgestorbenseins ist eine Rente, welche nach dem Tode zweier zusammenlebender Personen so lange ausgezahlt wird, bis beide nach den Sterblichkeitstabellen ganz ausgestorben sein müssen, also so lange, als die Altersergänzung

der jüngern Person Jahre enthält. Es würde dies also eine Art Waisenrente sein. Der baare Werth einer solchen ist

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{(a-{}^{1}a)(b-{}^{1}b)}{1+u} + \frac{(a-{}^{2}a)(b-{}^{2}b)}{(1+u)^2} + \frac{(a-{}^{3}a)(b-{}^{3}b)}{(1+u)^3} + \ldots\right)$$

Die Reihe geht fort bis zur Altersergänzung der jüngern Person, welche wir mit x bezeichnet haben. Das letzte Glied ist also

$= \frac{(a-{}^{x}a)(b-{}^{x}b)}{(1+u)^x}$. Setzt man $a-{}^{1}a$, $a-{}^{2}a$, $a-{}^{3}a$ u. s. w., d. h. die Zahl der im ersten, zweiten, dritten Jahre u. s. w. Verstorbenen, welche mit C einerlei Alter hatten, $= {}^{1}T$, ${}^{2}T$, ${}^{3}T$ u. s. w., und eben so $b-{}^{1}b$, $b-{}^{2}b$, $b-{}^{3}b$ u. s. w., d. h. die Zahl der im ersten, zweiten, dritten Jahre Verstorbenen, welche mit D einerlei Alter hatten, $= {}^{1}t$, ${}^{2}t$, ${}^{3}t$ u. s. w., so ist der Werth einer solchen Rente

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^{1}T{}^{1}t}{1+u} + \frac{{}^{2}T{}^{2}t}{(1+u)^2} + \frac{{}^{3}T{}^{3}t}{(1+u)^3} + \ldots\right).$$

Dieses mag hinlänglich sein, um Begriffe von den Rechnungen zu geben, welche bei Leibrenten, Wittwenrenten u. s. w. Statt finden. Das Ausführliche darüber findet man nebst den nöthigen Tabellen unter Andern in Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten ꝛc. Leipzig 1785. Über Tontinen wollen wir gar nichts sagen, weil wir weitläuftiger werden müßten, als es die Gränzen dieses Buchs verstatten.

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen der höheren Grade.

§. 46.

Der Binomische Lehrsatz.

Wenn eine Größe aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, so nennt man sie ein Binomium, eine zweinamige, z. B. $a+b$ oder $a-b$.

Der Binomische Lehrsatz zeigt, wie man eine allgemeine Formel für alle mögliche Potenzen eines Binomiums finden könne, so daß vermittelst dieser Formel jede beliebige Potenz

sind von a Lebenden nach n Jahren $a - {}^{n}a$ gestorben; wie viel also aus N gestorben sind, ergibt sich durch die Proportion:

$$a : a - {}^{n}a = N : T,$$

folglich $$T = N \cdot \frac{a - {}^{n}a}{a}.$$

Da ferner von b Lebenden nach n Jahren gestorben sind $b - {}^{n}b$, so erfährt man, wie viel aus $FD = EB = N \cdot \frac{a - {}^{n}a}{a}$ gestorben sind, durch die Proportion:

$$B : b - {}^{n}b = N \cdot \frac{a - {}^{n}a}{a} : T',$$

also $$T' = N \cdot \frac{(a - {}^{n}a)(b - {}^{n}b)}{ab},$$

und dies ist folglich die Zahl der ganz ausgestorbenen Paare. Man findet also dieselben, wenn man die Zahl der Gestorbenen im Alter $c + n$ und im Alter $d + n$ mit einander multiplizirt, das Produkt durch die Zahl der Lebenden im Alter c, multiplizirt mit der Zahl der Lebenden im Alter d, dividirt und den Quotienten mit der angenommnen Zahl der ursprünglichen Paare multiplizirt.

Wie viel z. B. sind von 100 Paaren nach 20 Jahren ganz ausgestorben, wenn der Eine, C, ein Alter von 30, der Andere, D, von 20 Jahren hat?

Es ist die Zahl der Lebenden

im Alter 30 = 439 = a,
" " 50 = 300 = ${}^{n}a$,
" " 20 = 491 = b,
" " 40 = 374 = ${}^{n}b$.

Also ist $$T' = \frac{(439 - 300)(491 - 374)}{439 \cdot 491} \cdot 100$$

$$= \frac{139 \cdot 117}{439 \cdot 491} \cdot 100 = 7.$$

Nach 20 Jahren sind also von 100 Paaren wahrscheinlich 7 Paare ganz ausgestorben.

§. 43.

Will man die Zahl der getrennten Paare bestimmen, so muß man unterscheiden, ob C oder D noch am Leben ist, weil

das Alter beider verschieden angegeben wurde. Da wir annehmen, daß in EB alle gestorben sind, so gibt es, wenn C noch am Leben ist, so viel getrennte Paare, als die Zahl der Gestorbenen in CD zwischen C und F beträgt. Wie viel nämlich aus N Personen vom Alter c nach n Jahren noch leben, ergibt sich durch die Proportion $a : {}^n\!a = N : L$,

also $$L = N.\frac{{}^n\!a}{a}.$$

Diese Zahl bezeichnet die in AE Lebenden und also auch die in CF Lebenden, wenn keiner aus CF gestorben wäre. Nun sind aber auch aus CF Einige gestorben, und aus FD leben noch Einige. Da wir aber nur die Zahl der getrennten Paare wissen wollen, wenn C, d. h. einer aus AB noch lebt, so gehen uns die Lebenden in FD nichts an; es kommt also nur darauf an, wie viel in CF gestorben sind. Nun sind nach n Jahren aus b gestorben $b - {}^n\!b$, also erhält man, wie viel aus CF, d. h. von $\frac{{}^n\!a}{a}.N$ $\left(\text{denn } CF = AE = N.\frac{{}^n\!a}{a}\right)$ gestorben sind, durch die Proportion

$$b : b - {}^n\!b = N.\frac{{}^n\!a}{a} : L',$$

folglich $$L' = N.\frac{{}^n\!a\,(b - {}^n\!b)}{ab},$$

und dies ist also die Zahl der getrennten Paare, wenn C noch lebt.

Lebt dagegen D noch, so wird die Zahl der getrennten Paare durch die in FD noch Lebenden bestimmt. Wenn aber nach n Jahren von b noch ${}^n\!b$ leben, so leben noch von N, wie oben, $N.\frac{{}^n\!b}{b}$, und daher wird die Zahl der getrennten Paare, wo D noch lebt, $= N.\frac{(a - {}^n\!a)\,{}^n\!b}{ab}$ sein.

Sind von N Paaren nach n Jahren noch übrig $N.\frac{{}^n\!a.{}^n\!b}{ab}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß eins dieser Paare nach n Jahren noch da sei $= \frac{N.{}^n\!a.{}^n\!b}{N.ab} = \frac{{}^n\!a.{}^n\!b}{ab}$.

Sind nach n Jahren von N Paaren $N.\frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$ ganz ausgeſtorben, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß eins dieſer Paare ganz geſtorben ſein wird $= \frac{N.(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{N.ab} = \frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$.

Eben ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß von einem getrennten Paare C noch lebe $= \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{N.ab} = \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab}$ und die Wahrſcheinlichkeit, daß D noch lebe $= \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab}$.

Setzen wir wieder, wie oben, das Alter von C = 30, das von D = 20, N = 100 und fragen wir nach der Zahl der getrennten Paare, wenn 20 Jahre ſeit der Verbindung verfloſſen ſind, ſo iſt ${}^{n}a = {}^{50}a$ und ${}^{n}b = {}^{40}b$. Lebt alſo C noch, ſo iſt die Zahl der getrennten Paare $= \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab} = \frac{300(491-374)}{439\cdot 491}.100 = \frac{300\cdot 117}{439\cdot 491}.100 = 16$, und wenn D noch lebt, $= \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab} = \frac{374(439-300)}{439\cdot 491}.100 = \frac{374\cdot 139}{439\cdot 491}.100 = 24$.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß C noch lebt, iſt $= \frac{16}{100} = 0{,}16$, und die, daß D noch am Leben iſt, $= \frac{24}{100} = 0{,}24$. Beide Wahrſcheinlichkeiten verhalten ſich alſo zu einander, wie 16 : 24, oder wie 2 : 3. Es waren alſo im zwanzigſten Jahre nach der Verbindung von 100 Paaren noch 52 Paare am Leben und 8 Paare ganz ausgeſtorben. Von 16 Paaren lebte C und von 24 Paaren D noch. Addirt man alle dieſe Zahlen zuſammen, ſo muß die anfängliche Zahl der Paare wieder herauskommen, wirklich iſt 52 + 8 + 16 + 24 = 100.

§. 44.

Die mittlere Dauer des Zuſammenlebens zweier Perſonen vom Alter c und d, oder die mittlere Verbindungsdauer wird gefunden, wenn man die in jedem Jahre übrigen Paare zuſammen

summen addirt, und die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt.

Ist N die anfängliche Zahl der Paare, so sind

am Ende des 1sten Jahres noch vorhanden $\frac{N.{}^{1}a{}^{1}b}{ab}$,

" " " 2ten " " " $\frac{N.{}^{2}a{}^{2}b}{ab}$,

" " " 3ten " " " $\frac{N.{}^{3}a{}^{3}b}{ab}$,

u. s. w.

Die Summe aller Paare ist also

$$N.\frac{{}^{1}a{}^{1}b}{ab}+N.\frac{{}^{2}a{}^{2}b}{ab}+N.\frac{{}^{3}a{}^{3}b}{ab}+N.\frac{{}^{4}a{}^{4}b}{ab}+\ldots+\ldots$$

Dividirt man diese Summe durch N, so ergibt sich die mittlere Verbindungsdauer zweier Personen

$$=\frac{{}^{1}a{}^{1}b+{}^{2}a{}^{2}b+{}^{3}a{}^{3}b+{}^{4}a{}^{4}b+\ldots+\ldots}{ab}.$$

Wir wollen dieselbe durch M bezeichnen.

Summirt man eben so die Zahl der getrennten Paare für jedes Jahr und dividirt die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare, so erhält man die mittlere Dauer des Überlebens der einen Person über die andere mit ihr verbundene.

Ist C am Leben und D todt, so ist die Zahl der getrennten Paare am Ende des

$$\text{1sten Jahres} = N.\frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b)}{ab},$$

$$\text{2ten " } = N.\frac{{}^{2}a(b-{}^{2}b)}{ab},$$

$$\text{3ten " } = N.\frac{{}^{3}a(b-{}^{3}b)}{ab},$$

u. s. w.

bis man endlich zum höchsten Lebensziele von C gelangt, oder zu $\frac{{}^{x}(b-{}^{x}b)}{ab}$, wo ${}^{x}a = 0$ und also noch mehr die folgenden Glieder $\frac{{}^{x+1}a}{}$ u. s. w. $= 0$ werden. Es bedeutet nämlich

x, wie oben, die Altersergänzung von C. Es iſt daher die mittlere Dauer des Überlebens, wenn D ſtirbt,

$$= \frac{N.{}^{1}a(b-{}^{1}b)+N.{}^{2}a(b-{}^{2}b)+\ldots+N.{}^{x}a(b-{}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b)+{}^{2}a(b-{}^{2}b)+{}^{3}a(b-{}^{3}b)+\ldots+{}^{x}a(b-{}^{x}b)}{ab}.$$

Eben ſo, wenn D der Überlebende iſt, iſt die mittlere Dauer dieſes Überlebens

$$= \frac{{}^{1}b(a-{}^{1}a)+{}^{2}b(a-{}^{2}a)+{}^{3}b(a-{}^{3}a)+\ldots+{}^{y}b(b-{}^{y}b)}{ab},$$

wo y die Altersergänzung von D bedeutet und alſo ${}^{y}b = o$ wird.

Die mittlere Zeit, wo ein Paar ganz ausgeſtorben ſein muß, nämlich nach x Jahren, wenn x die Altersergänzung der jüngern Perſon bedeutet, weil dann, wenn die jüngere Perſon nach Erreichung des höchſten wahrſcheinlichen Alters nicht mehr am Leben iſt, dies auch von der ältern nicht mehr Statt finden kann, wird gefunden, wenn man die für jedes Jahr ganz ausgeſtorbenen Paare bis zur Altersergänzung x zuſammen addirt und die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt. Heißt dieſe mittlere Zeit O, ſo iſt

$$O = \frac{N(a-{}^{1}a)(b-{}^{1}b)+N(a-{}^{2}a)(b-{}^{2}b)+\ldots+N(a-{}^{x}a)(b-{}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{(a-{}^{1}a)(b-{}^{1}b)+(a-{}^{2}a)(b-{}^{2}b)+\ldots+(a-{}^{x}a)(b-{}^{x}b)}{ab}.$$

Addirt man alle dieſe vier mittleren Zeiten, nämlich die mittlere Dauer der Verbindung $= N.\frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von C $= \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von D $= \frac{N.{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab}$ und die mittlere Zeit des Ganzausgeſtorbenſeins $= \frac{N(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$,

o ist die ganze Summe so groß, als die Altersergänzung des üngern Lebens.

Es ist nämlich für jedes nte Jahr und für jedes einzelne Paar die Summe dieser vier Größen

$$= \frac{N.{}^{n}a\,{}^{n}b}{N.ab} + \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{N.ab} + \frac{N.{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{N.ab} + \frac{N(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab} + \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab} + \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab} + \frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}.$$

Multiplizirt man in den Zählern die Faktoren wirklich mit einander, so ist die Summe

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ab - {}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ba - {}^{n}b\,{}^{n}a + ab - {}^{n}ab - a\,{}^{n}b + {}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}.$$

Hebt man alles, was sich heben läßt, so kommt $\frac{ab}{ab} = 1$, und da dieser Werth für jedes Jahr gilt, so ist für alle x Jahre, d. h. für die Altersergänzung der jüngern Person, die Summe $= x.1 = x$, d. h. gleich der Altersergänzung.

Ist eine von diesen vier Größen gefunden worden, so lassen sich daraus die drei übrigen bestimmen.

Ist z. B. die Verbindungsdauer berechnet, so wird die Dauer des Überlebens von C über D so gefunden.

Es ist nach Oben die Dauer dieses Überlebens für die einzelne Person

$$= \frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b) + {}^{2}a(b-{}^{2}b) + {}^{3}a(b-{}^{3}b) + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Daraus wird durch Multiplikation der Faktoren

$$\frac{{}^{1}ab - {}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}ab - {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}ab - {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Nimmt man nun die positiven Größen und die negativen, jede Sorte allein, zusammen, so kommt

$$\frac{{}^{1}ab + {}^{2}ab + {}^{3}ab + \ldots}{ab} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots\ldots}{a} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}.$$

Nun ist aber $\frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots}{a}$ gleich der mittleren Lebensdauer einer Person von gegebenem Alter, welche wir

x, wie oben, die Altersergänzung von C. Es ist daher die mittlere Dauer des Überlebens, wenn D stirbt,

$$= \frac{N.{}^{1}a(b-{}^{1}b)+N.{}^{2}a(b-{}^{2}b)+\ldots+N.{}^{x}a(b-{}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b)+{}^{2}a(b-{}^{2}b)+{}^{3}a(b-{}^{3}b)+\ldots+{}^{x}a(b-{}^{x}b)}{ab}.$$

Eben so, wenn D der Überlebende ist, ist die mittlere Dauer dieses Überlebens

$$= \frac{{}^{1}b(a-{}^{1}a)+{}^{2}b(a-{}^{2}a)+{}^{3}b(a-{}^{3}a)+\ldots+{}^{y}b(b-{}^{y}b)}{ab},$$

wo y die Altersergänzung von D bedeutet und also ${}^{y}b = o$ wird.

Die mittlere Zeit, wo ein Paar ganz ausgestorben sein muß, nämlich nach x Jahren, wenn x die Altersergänzung der jüngern Person bedeutet, weil dann, wenn die jüngere Person nach Erreichung des höchsten wahrscheinlichen Alters nicht mehr am Leben ist, dies auch von der ältern nicht mehr Statt finden kann, wird gefunden, wenn man die für jedes Jahr ganz ausgestorbenen Paare bis zur Altersergänzung x zusammen addirt und die Summe durch die anfängliche Zahl der Paare dividirt. Heißt diese mittlere Zeit O, so ist

$$O = \frac{N(a-{}^{1}a)(b-{}^{1}b)+N(a-{}^{2}a)(b-{}^{2}b)+\ldots+N(a-{}^{x}a)(b-{}^{x}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{(a-{}^{1}a)(b-{}^{1}b)+(a-{}^{2}a)(b-{}^{2}b)+\ldots+(a-{}^{x}a)(b-{}^{x}b)}{ab}.$$

Addirt man alle diese vier mittleren Zeiten, nämlich die mittlere Dauer der Verbindung $= N.\frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von C $= \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab}$, die mittlere Dauer des Überlebens von D $= \frac{N.{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab}$ und die mittlere Zeit des Ganzausgestorbenseins $= \frac{N(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}$,

so ist die ganze Summe so groß, als die Altersergänzung des jüngern Lebens.

Es ist nämlich für jedes nte Jahr und für jedes einzelne Paar die Summe dieser vier Größen

$$= \frac{N.{}^{n}a\,{}^{n}b}{N.ab} + \frac{N.{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{N.ab} + \frac{N.{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{N.ab} + \frac{N(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{N.ab}$$

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b}{ab} + \frac{{}^{n}a(b-{}^{n}b)}{ab} + \frac{{}^{n}b(a-{}^{n}a)}{ab} + \frac{(a-{}^{n}a)(b-{}^{n}b)}{ab}.$$

Multiplizirt man in den Zählern die Faktoren wirklich mit einander, so ist die Summe

$$= \frac{{}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ab - {}^{n}a\,{}^{n}b + {}^{n}ba - {}^{n}b\,{}^{n}a + ab - {}^{n}ab - a\,{}^{n}b + {}^{n}a\,{}^{n}b}{ab}.$$

Hebt man alles, was sich heben läßt, so kommt $\frac{ab}{ab} = 1$, und da dieser Werth für jedes Jahr gilt, so ist für alle x Jahre, d. h. für die Altersergänzung der jüngern Person, die Summe $= x.1 = x$, d. h. gleich der Altersergänzung.

Ist eine von diesen vier Größen gefunden worden, so lassen sich daraus die drei übrigen bestimmen.

Ist z. B. die Verbindungsdauer berechnet, so wird die Dauer des Überlebens von C über D so gefunden.

Es ist nach Oben die Dauer dieses Überlebens für die einzelne Person

$$= \frac{{}^{1}a(b-{}^{1}b) + {}^{2}a(b-{}^{2}b) + {}^{3}a(b-{}^{3}b) + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Daraus wird durch Multiplikation der Faktoren

$$\frac{{}^{1}ab - {}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}ab - {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}ab - {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots + \ldots}{ab}.$$

Nimmt man nun die positiven Größen und die negativen, jede Sorte allein, zusammen, so kommt

$$\frac{{}^{1}ab + {}^{2}ab + {}^{3}ab + \ldots}{ab} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

$$= \frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots}{a} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}.$$

Nun ist aber $\frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots}{a}$ gleich der mittleren Lebensdauer einer Person von gegebenem Alter, welche wir

$= Ec$ setzen wollen und $\frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$ ist die oben gefundene Formel für die mittlere Verbindungsdauer zweier Personen, welche wir M genannt haben. Also ist die Dauer des Überlebens von C über D $= Ec - M$.

Ist D die überlebende Person, so wird die mittlere Dauer des Überlebens derselben auf eben die Art gefunden

$$= \frac{{}^{1}b + {}^{2}b + {}^{3}b + \ldots}{b} - \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab},$$

also gleich der mittleren Lebensdauer von D, die wir $= Ed$ setzen wollen, weniger der mittleren Verbindungsdauer von C und D, also $= Ed - M$.

Die mittlere Zeit z des Ganzausgestorbenseins war für jedes einzelne Paar

$$= \frac{(a - {}^{1}a)(b - {}^{1}b) + (a - {}^{2}a)(b - {}^{2}b) + (a - {}^{3}a)(b - {}^{3}b) + \ldots}{ab}.$$

Durch die Multiplikation der Faktoren erhält man

$$\frac{ab - {}^{1}ab - a\,{}^{1}b + {}^{1}a\,{}^{1}b + ab - {}^{2}ab - a\,{}^{2}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + ab - {}^{3}ab - a\,{}^{3}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

Nimmt man wieder die positiven und negativen Größen, jede Sorte für sich, zusammen, so bekommt man

$$\frac{ab + ab + ab + \ldots}{ab} - \frac{a\,{}^{1}b + a\,{}^{2}b + a\,{}^{3}b + \ldots}{ab} - \frac{b\,{}^{1}a + b\,{}^{2}a + b\,{}^{3}a + \ldots}{ab} + \frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$$

Nun ist $\frac{ab + ab + ab + \ldots}{ab} = 1 + 1 + 1 + \ldots$ und so fort bis zum höchsten Alter, also die ganze Summe gleich der Altersergänzung x der jüngern Person. Ferner ist $\frac{a\,{}^{1}b + a\,{}^{2}b + a\,{}^{3}b + \ldots}{ab} = \frac{{}^{1}b + {}^{2}b + {}^{3}b + \ldots}{b}$, d. h. gleich der mittleren Lebensdauer der Person D $= Ed$ und $\frac{b\,{}^{1}a + b\,{}^{2}a + b\,{}^{3}a + \ldots}{ab} = \frac{{}^{1}a + {}^{2}a + {}^{3}a + \ldots}{a}$, d. h. gleich der mittleren Lebensdauer der Person C $= Ec$. Endlich ist $\frac{{}^{1}a\,{}^{1}b + {}^{2}a\,{}^{2}b + {}^{3}a\,{}^{3}b + \ldots}{ab}$ gleich der mittleren Verbin-

bungsdauer von C und D = M. Daher ist die mittlere Zeit des Ganzausgestorbenseins oder $z = x - (Ed + Ec) + M$.

Alle vier Größen zusammen geben endlich x oder das Ergänzungsalter der jüngsten Person.

Zu bemerken ist, daß zu der mittleren Verbindungsdauer noch $\frac{1}{2}$ addirt werden muß, weil, wie die gefundene Formel voraussetzt, die Trennungen der Paare nicht alle im Anfange, sondern in jedem Zeitpunkte des Jahres geschehen, welches also so viel ist, als ob alle in der Mitte des Jahres geschähen. Es ist daher die mittlere Verbindungsdauer

$$= \frac{{}^1a\,{}^1b + {}^2a\,{}^2b + {}^3a\,{}^3b + \ldots}{ab} + \frac{1}{2}.$$

§. 45.

Auf diesen verschiedenen Sätzen gründen sich die mancherlei Renten, welche sich auf die Verbindung zweier Personen beziehen. Die mittlere Verbindungsdauer gibt die Eherente, die mittlere Zeit des Überlebens der einen oder andern Person des verbundenen Paares die Wittwer- und Wittwenrente, und die mittlere Zeit des Ganzausgestorbenseins eine Waisenrente.

Unter Verbindungsrente zweier Personen (Eherente) verstehen wir eine Rente, die so lange ausgezahlt wird, als zwei Personen zusammen leben. Das Alter beider Personen muß gegeben sein, wenn sie sich einkaufen. Dann ist der baare Werth einer solchen Verbindungsrente

$$= \frac{\frac{{}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \frac{{}^4a\,{}^4b}{(1+u)^4} + \ldots}{ab}$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \frac{{}^4a\,{}^4b}{(1+u)^4} + \ldots\right).$$

Die Richtigkeit erhellet eben so wie bei den einfachen Leibrenten.

Eine Rente des Überlebens (Wittwenrente bei Eheleuten) ist eine Rente, welche nach dem Tode einer von zwei verbundenen Personen der andern bis zu ihrem Tode gezahlt wird. Ihr Werth ist, wenn C für die überlebende angenommen wird,

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1a\,(b - {}^1b)}{1+u} + \frac{{}^2a\,(b - {}^2b)}{(1+u)^2} + \frac{{}^3a\,(b - {}^3b)}{(1+u)^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1ab - {}^1a\,{}^1b}{1+u} + \frac{{}^2ab - {}^2a\,{}^2b}{(1+u)^2} + \frac{{}^3ab - {}^3a\,{}^3b}{(1+u)^3} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{ab}\left[\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{1+u^2} + \frac{3_a 3_b}{1+u^3} + \cdots \right.$$
$$\left. -\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{1+u^2} + \frac{3_a 3_b}{1+u^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{ab}\left[\frac{1}{b}\left(\frac{1_a}{1+u} + \frac{2_a}{1+u^2} + \frac{3_a}{1+u^3} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. -\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{1+u^2} + \frac{3_a 3_b}{1+u^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a}\left(\frac{1_a}{1+u} + \frac{2_a}{1+u^2} + \frac{3_a}{1+u^3} + \cdots\right)$$
$$-\frac{1}{ab}\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{1+u^2} + \frac{3_a 3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$

= der Leibrente von C weniger der Verbindungsrente von C und D.

Soll D überleben, so ist der Werth der Rente

$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{1_b\,{}_1a - 1_a}{1+u} + \frac{2_b\,{}_2a - 2_a}{(1+u)^2} + \frac{3_b\,{}_3a - 3_a}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\left(\frac{1_b a - 1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_b a - 2_a 2_b}{(1+u)^2} + \frac{3_b a - 3_a 3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{ab}\left[\frac{1_b a}{1+u} + \frac{2_b a}{(1+u)^2} + \frac{3_b a}{(1+u)^3} + \cdots \right.$$
$$\left. -\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{(1+u)^2} + \frac{3_a 3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{ab}\left[a\left(\frac{1_b}{1+u} + \frac{2_b}{(1+u)^2} + \frac{3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. -\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{(1+u)^2} + \frac{3_a 3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{b}\left(\frac{1_b}{1+u} + \frac{2_b}{(1+u)^2} + \frac{3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$
$$-\frac{1}{ab}\left(\frac{1_a 1_b}{1+u} + \frac{2_a 2_b}{(1+u)^2} + \frac{2_a 3_b}{(1+u)^3} + \cdots\right)$$

d. h. gleich der Leibrente von D, weniger der Verbindungsrente von C und D.

Eine Rente des Ganzausgestorbenseins ist eine Rente, welche nach dem Tode zweier zusammenlebender Personen so lange ausgezahlt wird, bis beide nach den Sterblichkeitstabellen ganz ausgestorben sein müssen, also so lange, als die Altersergänzung

jüngern Person Jahre enthält. Es würde dies also eine t Waisenrente sein. Der baare Werth einer solchen ist

$$\frac{1}{ab}\left(\frac{(a-{}^1a)(b-{}^1b)}{1+u}+\frac{(a-{}^2a)(b-{}^2b)}{(1+u)^2}+\frac{(a-{}^3a)(b-{}^3b)}{(1+u)^3}+\ldots\right)$$

e Reihe geht fort bis zur Altersergänzung der jüngern Person, lche wir mit x bezeichnet haben. Das letzte Glied ist also

$\frac{(a-{}^x_{\cdot}a)(b-{}^x_{\cdot}b)}{(1+u)^x}$. Setzt man $a-{}^1a$, $a-{}^2a$, $a-{}^3a$ f. w., d. h. die Zahl der im ersten, zweiten, dritten Jahre f. w. Verstorbenen, welche mit C einerlei Alter hatten, $=$ T, ${}^2T$, ${}^3T$ u. s. w., und eben so $b-{}^1b$, $b-{}^2b$, $b-{}^3b$ f. w., d. h. die Zahl der im ersten, zweiten, dritten Jahre rstorbenen, welche mit D einerlei Alter hatten, $=$ ${}^1t$, ${}^2t$, u. s. w., so ist der Werth einer solchen Rente

$$=\frac{1}{ab}\left(\frac{{}^1T{}^1t}{1+u}+\frac{{}^2T{}^2t}{(1+u)^2}+\frac{{}^3T{}^3t}{(1+u)^3}+\ldots\right).$$

Dieses mag hinlänglich sein, um Begriffe von den Rechnungen zu geben, welche bei Leibrenten, Wittwenrenten u. s. w. Statt finden. Das Ausführliche darüber findet man nebst den nöthigen Tabellen unter Andern in Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten ꝛc. Leipzig 1785. Über Tontinen wollen wir gar nichts sagen, weil wir weitläuftiger werden müßten, als es die Gränzen dieses Buchs verstatten.

Zweites Kapitel.

Von den Gleichungen der höheren Grade.

§. 46.

Der Binomische Lehrsatz.

Wenn eine Größe aus zwei Theilen zusammengesetzt ist, so nennt man sie ein Binomium, eine zweinamige, z. B. $a+b$ oder $a-b$.

Der Binomische Lehrsatz zeigt, wie man eine allgemeine Formel für alle mögliche Potenzen eines Binomiums finden könne, so daß vermittelst dieser Formel jede beliebige Potenz

einer solchen Größe sich entwickeln und ausdrücken läßt, ohne daß man nöthig hat, die vorhergehenden zu wissen.

Im ersten Theile haben wir gesehen, wie das Quadrat von $a+b$ gefunden werde, wenn man $a+b$ mit sich selbst, der Kubus, wenn man das Quadrat von $a+b$ wieder mit $a+b$, die vierte Potenz also, wenn man den Kubus von $a+b$ wieder mit $a+b$ u. s. w. multiplizirt. Um also eine höhere Potenz zu finden, muß man zuvor alle vorhergehenden kennen. Hier soll gezeigt werden, wie sich jeder höhere Grad einer Potenz unmittelbar finden lasse, ohne daß man die vorhergehenden zu wissen braucht.

Um das zum Grunde liegende Gesetz zu entdecken, wollen wir einige auf einander folgende Potenzen von $a+b$ auf gewöhnliche Art durch die Multiplikation bilden. Es ist nämlich

$$(a+b)^1 = a+b,$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5,$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+5ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5$$
$$\text{u. s. w.} \qquad +7ab^6+b^7$$

Bei diesen Produkten ist sogleich das Gesetz einleuchtend, nach welchem die Potenzen von a und b fortgehen. Die Potenzen von a fangen mit demjenigen Grade an, auf welchen das ganze Binomium erhoben wurde, werden mit jedem folgenden Gliede um einen Grad kleiner und stehen im letzten Gliede im 0ten Grade, so daß, weil $a^0 = 1$ ist, der Faktor a ganz wegfällt und bloß noch b in dem zugehörigen Grade stehen bleibt. Die Potenzen von b fangen mit dem 0ten Grade an, so daß, weil $b^0 = 1$ ist, der Faktor b ganz wegfällt und bloß a mit dem zugehörigen Grade geschrieben wird; mit jedem folgenden Gliede werden dann die Potenzen von b um einen Grad größer und steigen so lange, bis b in dem Grade steht, auf welchen das ganze Binomium erhoben werden sollte.

Ohne Koeffizienten ist also

$$(a+b) = a^1b^0+a^0b^1$$
$$= a^1+b^1,$$
$$(a+b)^2 = a^2b^0+a^1b^1+a^0b^2$$
$$= a^2+ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3b^0+a^2b^1+a^1b^2+a^0b^3$$
$$= a^3+a^2b+ab^2+b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$$
$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5b^0 + a^4b^1 + a^3b^2 + a^2b^3 + a^1b^4 + a^0b^5$$
$$= a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5.$$

So viel ergibt sich also, daß man für jede beliebige Potenz von $a+b$ sogleich die Potenzen der beiden Theile hinschreiben kann, ohne erst die vorhergehenden Grade zu berechnen. Ohne Koeffizienten wäre also z. B. die zehnte Potenz von

$$a+b = a^{10} + a^9b + a^8b^2 + a^7b^3 + a^6b^4 + a^5b^5 + a^4b^6$$
$$+ a^3b^7 + a^2b^8 + ab^9 + b^{10}.$$

Das Gesetz für die Koeffizienten ist inzwischen nicht sogleich einleuchtend. Vergleichen wir indessen die Koeffizienten in den oben von $a+b$ gemachten Potenzen mit den Queerreihen, welche die verschiedenen Ordnungen des ersten Systems der figurirten Zahlen (Th. I. §. 189.) bilden, so wird sich eine völlige Übereinstimmung zeigen.

Die Koeffizienten der ersten Potenz von $a+b$ sind 1 und 1; dies harmonirt mit dem ersten Gliede der ersten und zweiten Ordnung. Die Koeffizienten von $(a+b)^2$ sind 1, 2 und 1; dies sind die zweiten Glieder der ersten und zweiten Ordnung und das erste Glied der dritten Ordnung. Die Koeffizienten von $(a+b)^3$ sind 1, 3, 3 und 1; dies sind die dritten Glieder der ersten und zweiten, das zweite Glied der dritten und das erste Glied der vierten Ordnung. Die Koeffizienten von $(a+b)^4$ sind 1, 4, 6, 4 und 1; dies sind die vierten Glieder der ersten und zweiten, das dritte Glied der dritten, das zweite der vierten und das erste der fünften Ordnung, u. s. w.

Es wurde Th. I. §. 192. gezeigt, daß, wenn m die dem ganzen System vorstehende Nummer bedeutet, die Glieder jeder Ordnung für das mte Glied des Systems sich allgemein so ausdrücken lassen:

Ordnungen.

Zahl d. Gliedes.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
m	1	m	$\frac{m(m-1)}{1.2}$	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}$

u. s. w.

Da nun die Zahl des Gliedes vom ganzen System immer mit dem Grade der Potenz übereinstimmt, auf welche $a+b$

erhoben werden ſoll, ſo würde die $m$te Potenz von $a+b$ mit ihren Koefizienten heißen:

$$a^m + m.a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3.4.5.6}a^{m-6}b^6 \text{ u. s. w.}$$

Indeſſen iſt dieſe Analogie noch kein Beweis für die Allgemeingültigkeit des Geſetzes. Dieſe wird dagegen erhalten, wenn wir Achtung geben, wie eigentlich dieſe Koefizienten entſtehen. Zu dem Ende wollen wir nach und nach das Binomium $a+b$ auf die vierte Potenz erheben und die Multiplikation wirklich herſetzen:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} a^2+a(b+b)+b^2 \\ a \quad + b \\ \hline a^2+a^2(b+b)+ab^2 \\ a^2b+a(b^2+b^2)+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3 \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} a^3+a^2(b+b+b)+a(b^2+b^2+b^2)+b^3 \\ a \quad + b \\ \hline a^4+a^3(b+b+b)+a^2(b^2+b^2+b^2)+ab^3 \\ a^3b+a^2(b^2+b^2+b^2)+a(b^3+b^3+b^3)+b^4 \\ \hline a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = (a+b)^4 \end{array}$$

oder

$$a^4+a^3(b+b+b+b)+a^2(b^2+b^2+b^2+b^2+b^2+b^2)+a(b^3+b^3+b^3+b^3)+b^4.$$

Wir ſehen daraus, daß beim Quadrate der Koeffizient 2 des zweiten Gliedes entſteht, weil die Größe a zweimal mit b verbunden wird. Beim Kubus entſteht der Koeffizient 3 des zweiten Gliedes, weil die Größe a^2 dreimal mit b, und der Koeffizient 3 des dritten Gliedes, weil die Größe a dreimal mit b^2 verbunden wird. Bei der vierten Potenz entſteht der Koeffizient 4 des zweiten Gliedes, weil die Größe a^3 viermal mit b, der Koeffizient 6 des dritten Gliedes, weil die Größe a^2 ſechsmal mit b^2 und der Koeffizient 4 des vierten Gliedes, weil die Größe a viermal mit b^3 verbunden wird. Die Koeffizienten

zeigen also überhaupt an, wie oft ein gewisses Glied in der Potenz vorkommt.

Vertauschen wir das zweite Glied des Binomiums bei jeder neuen Multiplikation mit einem andern Buchstaben, so wird die Zusammensetzung der einzelnen Glieder noch deutlicher erhellen. Wir wollen also, statt $a+b$ viermal mit sich selbst zu multipliziren, das Produkt $(a+b).(a+c).(a+d).(a+e)$ machen:

$$\begin{array}{l}
a+b \\
a+c \\
\hline
a^2+ab \\
\qquad\qquad ac+bc \\
\hline
a^2+ab+ac+bc = a^2+a(b+c)+bc \\
\qquad\qquad a+d \\
\hline
a^3 \qquad +a^2b \qquad +abc \\
\qquad\quad +a^2c \qquad +abd \\
\qquad\quad +a^2d \qquad +acd \qquad +bcd \\
\hline
a^3 \qquad +a^2(b+c+d) \qquad +a(bc+bd+cd)+bcd \\
a^3 \qquad +a^2(b+c+d) \qquad +a(bc+bd+cd)+bcd \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a+e \\
\hline
a^4+a^3(b+c+d) \qquad +a^2(bc+bd+cd) \qquad +abcd \\
\quad a^3e \qquad +a^2(eb+ec+ed)+a(bce+bde+cde)+bcde \\
\hline
a^4+a^3(b+c+d+e)+a^2(bc+bd+cd+eb+ec+ed)+a(bcd+bce+ \\
\qquad\qquad +bde+cde)+bcde.
\end{array}$$

Es erhellet jetzt, daß die Koeffizienten der Glieder des Produkts offenbar dadurch entstehen, daß der gemeinschaftliche Theil a in verschiedene Verbindungen mit den zweiten Theilen der mit einander multiplizirten Faktoren tritt, und das Gesetz der Koeffizienten in einer Potenz hängt folglich von den Gesetzen der Kombination ab. In dem ersten Gliede der obigen Produkte (a^2, a^3, a^4) steht a nur mit sich selbst, aber nicht mit b, c, d oder e in Verbindung, es kann daher immer nur eine Verbindung geben (a mit a, a mit aa, a mit aaa), darum ist der Koeffizient dieses Gliedes $= 1$. Beim zweiten Gliede tritt a nicht nur mit sich selbst, sondern auch mit den anderen Theilen der Faktoren in Verbindung. Die Verbindung mit sich selbst gibt immer nur Eine (aa, aaa), aus der Verbindung mit dem zweiten Theile der Faktoren aber müssen so viele Kombinationen entstehen, als es solche zweite Theile gibt, also bei der Multiplikation von $a+b$ mit $a+c$ zwei Verbindungen, ab und ac, bei der Multiplikation von $(a+b).(a+c).(a+d)$ drei Verbindungen, a^2b, a^2c, a^2d u. s. w. Setzt man nun $b = c = d = e$, so werden $ab+ac$ in $ab+ab = 2ab$, $a^2b+a^2c+a^2d$ in $a^2b+a^2b+a^2b = 3a^2b$, $a^3b+a^3c+a^3d+a^3e$ in $a^3b+a^3b+a^3b+a^3b = 4a^3b$ u. s. w.

verwandelt, und die Koeffizienten 2, 3, 4 u. s. w. stimmen daher jedesmal mit der Anzahl der mit einander multiplizierten Faktoren $(a+b).(a+b)$, $(a+b).(a+b).(a+b)$, $(a+b).(a+b).(a+b).(a+b)$ u. s. w., d. h. mit dem Grade der Potenz überein, auf welche $a+b$ erhoben worden ist. Ist also dieser Grad der mte, so ist der Koeffizient des zweiten Gliedes auch $= m$ und die ersten beiden Glieder der mten Potenz heißen $a^m + ma^{m-1}b$ oder $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$, welche Form der folgenden Glieder wegen gewöhnlich gewählt wird.

Im dritten Gliede wird a oder eine Potenz von a mit allen möglichen Produkten verbunden, die entstehen, wenn man je zwei und zwei von den anderen Theilen der Faktoren mit einander multiplizirt. Die Anzahl dieser Produkte hängt also von der Beantwortung der Frage ab: wie viel Kombinationen zu zweien ohne Wiederholung lassen sich aus einer gegebenen Anzahl Größen hervorbringen? Dies lehrt Th. I. §. 185. Aus m Größen lassen sich $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ Kombinationen zu zweien bilden. Da es nun so viel andere Theile in den Faktoren gibt, als die Anzahl der Faktoren beträgt, so ist in dem Produkte $(a+b).(a+c)$ die Größe $m = 2$, also $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2} = 1$, das dritte Glied enthält also nur Eine Kombination zu zweien $= bc$, woraus, wenn $b = c$ ist die Potenz b^2 wird. Bei dem Produkte $(a+b).(a+c).(a+d)$ ist $m = 3$, also $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$. Es gibt also drei Kombinationen zu zweien bc, bd, cd und ist $b = c = d$, so wird daraus b^2, b^2, b^2, folglich ist $a(bc+bd+cd) = a(b^2+b^2+b^2) = a.3b^2 = 3ab^2$ und daher 3 der Koeffizient des dritten Gliedes im Kubus. Bei dem Produkte $(a+b).(a+c).(a+d).(a+e)$ ist $m = 4$, also $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Es gibt also sechs Kombinationen zu zweien bc, bd, be, cd, ce, de und setzt man $b = c = d = e$, so wird jede $= b^2$, folglich ist das dritte Glied $= a^2(b^2+b^2+b^2+b^2+b^2+b^2) = a^2.6b^2 = 6a^2b^2$, und also der Koeffizient $= 6$. Daher ist überhaupt der Koeffizient des dritten Gliedes $= \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ und die ersten drei Glieder der mten Potenz von $a+b$ heißen $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}a^{m-1}b^2$.

Im vierten Gliede wird a oder eine Potenz von a mit allen möglichen Produkten verbunden, welche entstehen, wenn man je drei und drei der anderen Theile der Faktoren mit einander multiplizirt. Die Anzahl dieser Produkte wird also gefunden, wenn man weiß, wie viel strenge Kombinationen zu dreien aus m Größen sich bilden lassen. Die Antwort $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist Th. I. §. 185. bewiesen. Kombinationen zu dreien kann es erst in einem Produkte aus drei Faktoren, also in $(a+b).(a+c).(a+d)$ geben. Hier ist $m = 3$, also $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1$, d. h. es gibt nur ein einziges Produkt aus drei Faktoren $= bcd$, woraus, wenn $b = c = d$ ist, der Kubus von b entsteht.

Bei dem Produkte $(a+b).(a+c).(a+d).(a+e)$ gibt es vier Größen, die zu dreien verbunden werden können; die Anzahl dieser Verbindungen $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ ist also $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$, nämlich bcd, bce, bde, cde, und ist $b = c = d = e$, so wird aus jeder b^3, also das vierte Glied $= a(b^3+b^3+b^3+b^3) = a \cdot 4b^3 = 4ab^3$, und folglich 4 der Koeffizient dieses Gliedes. Daher ist überhaupt der Koeffizient dieses Gliedes $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und die ersten vier Glieder der Potenz sind $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3}b^3$.

Die Analogie gibt jetzt von selbst den weitern Fortgang des Gesetzes. Mögen so viel Faktoren, jeder $= a+b$, mit einander multiplizirt werden, als man immer will, d. h. mag $a+b$ auf eine Potenz, welche es sei, erhoben werden, so ist allemal der Koeffizient des zweiten Gliedes gleich der Kombination einer Potenz von a mit dem andern Theil b, so vielmal genommen, als die Potenz Grade enthält, der Koeffizient des dritten Gliedes gleich der Anzahl aller strengen Kombinationen zu zweien aus so viel Größen, als der Grad der Potenz angibt, der Koeffizient des dritten Gliedes gleich der Anzahl aller strengen Kombinationen zu dreien, der des vierten gleich der Anzahl aller strengen Kombinationen zu vieren u. s. w. aus so viel Größen, als der Grad der Potenz angibt. Die allgemeine Formel für $(a+b)^m$ ist daher

Ist also $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots b^m$, so soll auch $(a+b)^{m+1}$ sein $= a^{m+1} + \frac{m+1}{1}a^m b + \frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2 + \frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3 + \ldots\ldots + b^{m+1}$.

Es ist $(a+b)^{m+1} = (a+b)^m \cdot (a+b)$. Nun ist

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}b^4 + \ldots\ldots \frac{m}{1}ab^{m-1} + b^m.$$

Man multiplizire diese Reihe wirklich mit $a+b$, so erhält man durch die Multiplikation mit a die Reihe

$$a^{m+1} + \frac{m}{1}a^m b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4 + \ldots\ldots \frac{m}{1}a^2b^{m-1} + ab^m.$$

Die Multiplikation mit b gibt aber

$$a^m b + \frac{m}{1}a^{m-1}b^2 + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}b^5 + \ldots\ldots \frac{m}{1}ab^m + b^{m+1}.$$

Jetzt addire man die zu einerlei Potenz von a und b gehörigen Glieder beider Reihen, die wir zu dem Ende unter einander schreiben und die Summe zur Seite setzen wollen. Also

$$\begin{array}{rcl} a^{m+1} & = & a^{m+1}, \\ \frac{m}{1}a^m b & & \\ +a^m b & \Big\} = & \frac{(m+1)}{1}a^m b \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2\\&+\frac{m}{1}a^{m-1}b^2\end{aligned}\right\}=\left(\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+m\right)a^{m-1}b^2$$

$$=\frac{m(m-1)+2m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2$$

$$=\frac{m(m-1+2)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2$$

$$=\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2$$

$$=\frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3\\&+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^3\end{aligned}\right\}=\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\right)a^{m-2}b^3$$

$$=\left(\frac{m(m-1)(m-2)+3m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)a^{m-2}b^3$$

$$=\frac{m(m-1)[(m-2)+3]}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3$$

$$=\frac{m(m-1)[(m-2)+3]}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3$$

$$=\frac{m(m-1)(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4\\&+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^4\end{aligned}\right\}=\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)a^{m-3}b^4$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)+4m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)[(m-3)+4]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5\\ +\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}b^5\end{array}\right\}=$$

$$=\left(\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)a^{m-4}b^5$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)+5m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)[(m-4)+5]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5$$

$$=\frac{m(m+1)(m-2)(m-3)(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5$$

$$=\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{l}ab^m\\ +\frac{m}{1}ab^m\end{array}\right\}=\frac{m+1}{1}ab^m$$

$$b^{m+1}=b^{m+1}.$$

Es ist also

$$(a+b)^{m+1}=a^{m+1}+\frac{m+1}{1}a^mb+\frac{(m+1)m}{1\cdot 2}a^{m-1}b^2$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-2}b^3+$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-3}b^4+$$
$$+\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{m-4}b^5$$
$$+\ldots+\frac{m+1}{1}ab^m+b^{m+1}.$$

Setzt man in dieser Formel $m+1=n$, also $m=n-1$, $m-1=n-2$ u. s. w., so erhält man eine ganz analoge Formel, wie für $(a+b)^m$. Es ist alsdann

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4$$
$$+\ldots\frac{n}{1}ab^{n-1}+b^n.$$

§. 48.

Zusatz.

Es ist aber auch der binomische Lehrsatz für $(a+b)^{m+n}$ wahr, wenn er für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^n$ wahr ist. Denn $(a+b)^{m+n}$ ist $= (a+b)^m . (a+b)^n$. Nun ist

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 + \ldots\ldots$$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots$$

Multiplizirt man nun beide Reihen mit einander, so kommt

$$(a+b)^m . (a+b)^n = (a+b)^{m+n} =$$

$$a^{m+n} + \frac{m}{1}a^{m+n-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m+n-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m+n-3}b^3 + \ldots + \ldots$$

$$+ \frac{n}{1}a^{m+n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{m}{1}a^{m+n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m+n-3}b^3 + \ldots + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{m+n-2}b^2 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m}{1}a^{m+n-3}b^3 + \ldots + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m+n-3}b^3 + \ldots$$

Addirt man nun die Glieder, welche gleiche Potenzen haben, zusammen, so erhält man

$$(a+b)^{m+n} = a^{m+n} + \frac{m+n}{1}a^{m+n-1}b +$$

$$+\left(\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot m}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\right)a^{m+n-2}b^2 +$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{n}{1}\cdot\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{m}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)a^{m+n-3}b^3$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun iſt

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot m}{1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{m(m-1)+2mn+n(n-1)}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{m^2-m+2mn+n^2-n}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{m^2+2mn+n^2-m-n}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n)-m-n}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n)-(m+n)}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{(m+n)[(m+n)-1]}{1\cdot 2}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}.$$

Ferner iſt

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2m(m-1)}{1\cdot 2}+\frac{1\cdot(n-1)m}{1\cdot 2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{m(m-1)(m-2)+3m(m-1)+3mn(n-1)+n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Multiplicirt man im Zähler wirklich, ſo kommt

$$\frac{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3-3m^2-6mn-3n^2+2m+2n}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{(m+n)(m^2+2mn+n^2)-(m+n)(3m+3n)+2(m+n)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{(m+n)(m^2+2mn+n^2-3m-3n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{(m+n)(m^2+mn-m+mn+n^2-n-2m-2n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{(m+n)m(m+n-1)+n(m+n-1)-2(m+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Es iſt folglich

$$(a+b)^{m+n}=a^{m+n}+\frac{m+n}{1}a^{m+n-1}b+$$

$$+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1\cdot 2}a^{m+n-2}b^2+$$

$$+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m+n-3}b^3$$

$$+\ldots\ldots$$

Setzt man jetzt $m+n=q$, ſo ſieht man deutlich, daß

e m + n te Potenz von a + b nach demselben Gesetze fortgeht, it $(a+b)^m$. Es ist nämlich alsdann

$$+b)^q = a^q + \frac{q}{1}a^{q-1}b + \frac{q(q-1)}{1\cdot 2}a^{q-2}b^2 +$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{q-3}b^3 +$$
$$+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{q-4}b^4 + \ldots$$

Dieser Satz ist in der größten Allgemeinheit wahr, es igen m und n Zahlen sein, was es für welche wollen, ganze, brochne, positive, negative, irrationale u. s. w.; denn er sagt chts weiter aus, als, wenn der Satz für $(a+b)^m$ und für $+b)^n$ wahr ist, so muß er auch für $(a+b)^{m+n}$ wahr sein.

§. 49.

Zusatz.

Es ist ferner auch der binomische Lehrsatz wahr, wenn der Exponent der Potenz verneint ist, also

$$a+b)^{-m} \text{ auch} = a^{-m} + \frac{-m}{1}a^{-m-1}b + \frac{-m(-m-1)}{1\cdot 2}a^{-m-2}b^2$$
$$+\frac{-m(-m-1)(-m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-m-3}b^3$$
$$+\frac{-m(-m-1)(-m-2)(-m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-m-4}b^4$$
$$+ \ldots\ldots$$

Die Richtigkeit erhellet so: Es ist

$$a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b} \text{ u. s. w.}$$

in Produkt aus m Faktoren, deren jeder $= \frac{1}{a+b}$ ist. Nun ist der Satz wahr für $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}$, denn wenn man mit a + b in 1 dividirt, so erhält man

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \ldots\ldots$$

und dies ist =

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\cdot b + \frac{1}{a^3}\cdot b^2 - \frac{1}{a^4}\cdot b^3 + \frac{1}{a^5}\cdot b^4 - \frac{1}{a^6}\cdot b^5 + \ldots$$

Dafür kann man wieder schreiben:

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + a^{-5}b^4 - a^{-6}b^5$$
$$+ \ldots\ldots$$

oder auch $a^{-1} + \frac{-1}{1}a^{-2}b + \frac{-1\cdot-2}{1\cdot2}a^{-3}b^2 + \frac{-1\cdot-2\cdot-3}{1\cdot2\cdot3}a^{-4}b^3 + \frac{-1\cdot-2\cdot-3\cdot-4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^{-5}b^4 + \frac{-1\cdot-2\cdot-3\cdot-4\cdot-5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}a^{-6}b^5 + \ldots\ldots$

weil die Koeffizienten immer $= 1$ und die Glieder abwechselnd positiv und negativ sind. Es ist aber, wenn $m = 1$ ist, der Koeffizient $\frac{-1}{1} = \frac{-m}{1}$; ferner $\frac{-m(-m-1)}{1\cdot2} = \frac{-1(-1-1)}{1\cdot2} = \frac{-1\cdot-2}{1\cdot2}$; desgleichen $\frac{-m(-m-1)(-m-2)}{1\cdot2\cdot3} = \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{1\cdot2\cdot3} = \frac{-1\cdot-2\cdot-3}{1\cdot2\cdot3}$ u. s. w., also die Formel für die Potenz $(a+b)^{-1}$ gültig. Nun kann man nach dem vorigen Paragraphen weiter schließen: Der gegenwärtige Satz ist für $(a+b)^{-1}$ wahr, also muß er auch wahr sein für $(a+b)^{-(1+1)} = (a+b)^{-2}$ und daher auch für $(a+b)^{-3}$, für $(a+b)^{-4}$ u. s. w., also auch für $(a+b)^{-n}$.

§. 50.

Zusatz.

Ist der binomische Lehrsatz wahr für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^n$, so ist er auch wahr für $(a+b)^{m-n} = \frac{(a+b)^m}{(a+b)^n}$.

Es sei $\frac{(a+b)^m}{(a+b)^n} = (a+b)^q$, bei welcher Annahme $q = m-n$ ist, so muß $(a+b)^m = (a+b)^q \cdot (a+b)^n$ sein. Nun ist angenommen, daß der Satz wahr sei für $(a+b)^m$ und für $(a+b)^n$, und nach §. 48. ist er für $(a+b)^m$ wahr, wenn er für $(a+b)^q$ und $(a+b)^n$ wahr ist. Da er nun vom Produkte $(a+b)^m$ und von dem einen Faktor desselben $(a+b)^n$ wahr ist, so kann er unmöglich von dem andern Faktor desselben $(a+b)^q$ falsch sein, weil nicht abzusehen ist, wie das Produkt aus dem Falschen und Wahren etwas Wahres geben könne, also ist bewiesen, daß er auch für $(a+b)^q$ wahr sei, d. h. für $\frac{(a+b)^m}{(a+b)^n}$.

Eben so muß der binomische Lehrsatz auch für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, wo $\frac{m}{n}$ jeden möglichen Bruch bezeichnet, wahr sein. Denn es ist $\left[(a+b)^{\frac{m}{n}}\right]^n = (a+b)^m = (a+b)^{\frac{m}{n}} \cdot (a+b)^{\frac{m}{n}} \cdot (a+b)^{\frac{m}{n}}$

u. s. w., bis man ein Produkt aus n Faktoren, jeder $= (a+b)^{\frac{m}{n}}$ erhalten hat. Nun ist der Satz wahr für $(a+b)^m$, weil m eine ganze Zahl ist, und er ist nach §. 48. für $(a+b)^m$ wahr, wenn er von jedem Faktor desselben, also von $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ wahr ist. Da er nun für $(a+b)^m$ gilt, so muß er auch für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ gelten, weil er für $(a+b)^m$ nur wahr sein kann, wenn er für $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ wahr ist.

Auf diese Art kann die völlige Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes bewiesen werden, der Exponent der Potenz mag beschaffen sein, wie er will. Man hat noch andere Beweise für denselben; der gegenwärtige wird aber für unsern Zweck genügen.

§. 51.
Zusatz.

Ist der Exponent der Potenz, auf welche $a+b$ erhoben werden soll, eine ganze bejahte Zahl, so bricht die Reihe allemal mit dem Gliede ab, dessen Zahl um 1 größer ist, als der Exponent, also bei $(a+b)^m$ mit dem $m+1$ten Gliede; ist aber der Exponent ein Bruch oder verneint, so geht die Reihe ohne Ende fort und die Potenz kann daher nie ganz vollkommen dargestellt werden.

Es ist nämlich allgemein

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}b^3 +$$
$$+ \ldots\ldots \frac{m(m-1)\ldots\ldots[m-(m-1)]}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots\ldots m}a^{m-m}b^m$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots[m-(m-1)]\cdot(m-m)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots m\cdot m+1}a^{m-(m+1)}b^{m+1}$$

Dieses letzte Glied muß, wenn m eine ganze bejahte Zahl ist, $= 0$ werden, denn es ist ein Faktor desselben $m-m=0$, also endigt sich die Reihe mit dem $m+1$ten Gliede und $\frac{m(m-1)\ldots\ldots[m-(m-1)]}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots\ldots m}a^{m-m}b^m$ ist das letzte Glied derselben.

Ist dagegen m eine gebrochene Zahl, so geht die Reihe ohne Ende fort, denn das, was in den Koefficienten von m abgezogen wird, ist immer eine ganze Zahl, die also niemals gleich einem Bruche werden kann; es kann folglich niemals ein Faktor m — m = 0 vorkommen, folglich auch die Reihe nie aufhören. Die allgemeine Formel muß jetzt so ausgedrückt werden:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}b^2 + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\ldots n+1}a^{m-(n+1)}b^{n+1},$$

wo m den gebrochenen Exponenten, n im allgemeinen den Exponenten der Potenz bedeutet, auf welche b erhoben wird, so wie die ganze Zahl, die man in den Koefficienten von n abzuziehen hat.

Ist m negativ, so ist zwar das, was in den Koefficienten von m abgezogen wird, eine ganze Zahl, aber eben, weil m negativ ist, so wird das Abzuziehende nicht abgezogen, sondern addirt, folglich wird — m — m nicht = 0, sondern = — 2m und — m — (m + 1) = — (2m + 1), also wachsen die Faktoren im Koefficienten immer fort und werden nie vernichtet.

Zur Erläuterung wollen wir ein Beispiel von Reihen für gebrochene und negative Exponenten hierher setzen.

Es sei also $m = \frac{1}{3}$, so hat man

$$(a+b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{3}}{1}a^{\frac{1}{3}-1}b + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1\cdot 2}a^{\frac{1}{3}-2}b^2 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{\frac{1}{3}-3}b^3 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(\frac{1}{3}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{\frac{1}{3}-4} + \ldots\ldots$$
$$= a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b + \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}}{1\cdot 2}a^{-\frac{5}{3}}b^2 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}\cdot -\frac{5}{3}}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-\frac{8}{3}}b^3 +$$
$$+ \frac{\frac{1}{3}\cdot -\frac{2}{3}\cdot -\frac{5}{3}\cdot -\frac{8}{3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \ldots\ldots$$
$$= a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b + \frac{-\frac{2}{9}}{2}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{\frac{10}{27}}{6}a^{-\frac{8}{3}}b^3 +$$
$$+ \frac{-\frac{80}{81}}{24}a^{-\frac{11}{3}}b^4 + \ldots\ldots$$
$$= a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b - \frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3 - \frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4$$
$$+ \ldots\ldots$$

Es sei $m = -3$, so ist

$$(a+b)^{-3} = a^{-3} + \frac{-3}{1}a^{-3-1}b + \frac{-3(-3-1)}{1\cdot 2}a^{-3-2}b^2 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-3-3}b^3 + \frac{-3(-3-1)(-3-2)(-3-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-3-4}b^4 + \ldots\ldots$$

$$= a^{-3} - 3a^{-4}b + \frac{-3\cdot -4}{1\cdot 2}a^{-5}b^2 - \frac{-3\cdot -4\cdot -5}{1\cdot 2\cdot 3}a^{-6}b^3 + \frac{-3\cdot -4\cdot -5\cdot -6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{-7}b^4 + \ldots\ldots$$

$$= a^{-3} - 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 - 10a^{-6}b^3 + 15a^{-7}b^4 + \ldots\ldots$$

§. 52.

Es ist auch $(a+b)^m =$

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = a^m\left(1 + \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{b^4}{a^4} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{b^5}{a^5} + \ldots\right)$$

Sind nun m und $\frac{b}{a}$ eigentliche Brüche, so werden die Koeffizienten und die Potenzen von $\frac{b}{a}$ immer kleinere Brüche und die Reihe nähert sich dem wahren Werthe von $(a+b)^m$ sehr schnell. Man kann daher diese Reihe gebrauchen, um Irrationalwurzeln durch Näherung auszudrücken. Dies ist besonders leicht, wenn man den ersten Theil a so bestimmt, daß er eine Potenz vom mten Grade ist, und wenn dann der übrig bleibende Theil b nur eine kleine Zahl ausdrückt. Es soll z. B. $\sqrt[5]{}$ aus 16810 gezogen werden. Nun ist $16807 = 7^5$ und $7 = \sqrt[5]{16807} = 16807^{\frac{1}{5}}$, folglich ist

$$\sqrt[5]{16810} = \sqrt[5]{(16807+3)} = (16807+3)^{\frac{1}{5}} = 16807^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{3}{16807}\right)^{\frac{1}{5}} = 7\left(1+\frac{3}{16807}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 7\left(1 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{3}{16807} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{9}{16807^2} + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{27}{16807^3}\right.$$
$$\left. + \frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)(\frac{1}{5}-2)(\frac{1}{5}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{81}{16807^4} + \ldots\ldots\right)$$
$$= 7\left(1 + \frac{1\cdot 3}{5\cdot 16807} + \frac{1\cdot -4}{5\cdot 5\cdot 2}\cdot\frac{9}{282475249} + \right.$$
$$+ \frac{1\cdot -4\cdot -9}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{27}{4747561509943} +$$
$$\left. + \frac{1\cdot -4\cdot -9\cdot -14}{5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{81}{79792266297612001} + \ldots\right)$$
$$= 7\left(1 + \frac{3}{84035} - \frac{36}{14123762450} + \frac{972}{3560671132457250}\right.$$
$$\left. - \frac{40824}{119688399446418001500 0} + \ldots\ldots\right)$$

Verwandelt man diese Brüche in Dezimalbrüche, so kommt

$$\sqrt[5]{16810} = 7(1 + 0{,}0000356994120307014$$
$$- 0{,}0000000025488958701$$
$$+ 0{,}0000000000002729822$$
$$- 0{,}0000000000000000341 + \ldots)$$

Addirt man nun diese Brüche gehörig, so kommt

$$\sqrt[5]{16810} = 7(1 + 0{,}0000356968634177794\ldots)$$
$$= 7\cdot 1{,}0000356968634177794\ldots$$
$$= 7{,}0002498780439244558.$$

So mühsam die Berechnung der Reihe auch ist, so wäre doch das wirkliche Ausziehen der fünften Wurzel auf so viele Dezimalstellen noch mühsamer. Indessen geben auch schon die ersten drei Glieder die Wurzel richtig genug, nämlich

$$= 7(1 + 0{,}0000356968631\ldots)$$
$$= 7\cdot 1{,}0000356968631$$
$$= 7{,}0002498780417,$$

also in den ersten eilf Dezimalstellen richtig.

§. 53.
Zusatz.

So wie eine zweitheilige Wurzel $a + b$ vermittelst des Binomischen Lehrsatzes sich auf jede beliebige Potenz erheben läßt, so auch jede vieltheilige Wurzel. Man braucht nur immer alle letzten Theile weniger dem ersten als Einen, und den ersten als den andern Theil anzusehen und dann die Potenz nach dem Vorigen zu entwickeln.

Es sei z. B. $a + b + c$ auf die mte Potenz zu erheben, so setze man $b + c = B$, also $(a + b + c)^m = (a + B)^m$, so ist

$$(a+B)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}B + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}B^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}B^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}B^4 + \ldots$$

Setzt man nun für B, B^2, B^3, B^4 u. s. w. die leicht zu findenden Werthe, so erhält man

$$a^m = a^m$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}B = \frac{m}{1}a^{m-1}(b+c)$$

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}B^2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}(b+c)^2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^{m-2}(b^2+2bc+c^2)$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}B^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}(b+c)^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{m-3}(b^3+3b^2c+3bc^2+d^3)$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}B^4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}(b+c)^4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{m-4}(b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+d^4)$$

u. s. w.

Indessen hat die Analysis noch bequemere und leichtere Methoden, jede vieltheilige Wurzel auf jede beliebige Potenz zu erheben, die wir aber jetzt noch nicht zeigen können. Wir wenden uns vielmehr nach diesen Vorerinnerungen zu der Auflösung der höheren Gleichungen selbst und zwar, da wir die quadratischen schon gehabt haben, derjenigen, in welchen die unbekannte Größe in noch höheren Potenzen steht.

Von der Zusammensetzung der höheren Gleichungen aus einfachen Wurzelgleichungen.

§. 54.

Wenn in irgend einer Gleichung ein Werth der unbekannten Größe gefunden worden ist, z. B. in der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + q = 0$ der Werth von $x = p$,

so ist $x - p = 0$ und diese Gleichung nennt man eine Wurzelgleichung. Der Ausdruck kommt daher, daß in reinen höheren Gleichungen der Werth der unbekannten Größe wirklich durch Wurzelausziehen gefunden wird, z. E. in der Gleichung $x^4 = 81$ ist $x = \sqrt[4]{81} = 3$, also $x - 3$ eine Wurzelgleichung und durch Wurzelausziehen gefunden. Man hat daher den Ausdruck auch auf die höheren vollständigen Gleichungen übergetragen. Hat in einer solchen Gleichung das Unbekannte x, mehrere Werthe, z. B. $x = p$, $x = q$, $x = r$, $x =$ u. s. w., so entstehen eben so viel Wurzelgleichungen $x - p = 0$, $x - q = 0$, $x - r = 0$, $x - s = 0$ u. s. w. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die höheren Gleichungen durch die Multiplikation dieser Wurzelgleichungen entstehen, daß sie als Faktoren derselben zu betrachten sind, und daß jede höhere Gleichung so viel solcher Faktoren, also auch so viel Werthe von x enthalte, als der Exponent der höchsten Potenz von x Einheiten hat.

Von den Gleichungen des zweiten Grades ist es schon bekannt, daß jede zwei Werthe $x = \frac{p + \sqrt{(p^2 \mp 4q)}}{2}$ und $x = \frac{p - \sqrt{(p^2 \mp 4q)}}{2}$ hat. Setzen wir den ersten Werth $= a$ und den zweiten $= b$, so sind $x - a = 0$ und $x - b = 0$ ihre Wurzelgleichungen. Multiplizirt man diese mit einander, so kommt eine Gleichung des zweiten Grades, die ganz die Form einer vernichteten quadratischen Gleichung hat. Denn

$$\begin{array}{rcl} x - a & = & 0, \\ \text{mit } x - b & & \text{mit } 0 \text{ multiplizirt,} \\ \hline \text{gibt } x^2 - (a+b)x + ab & = & 0. \end{array}$$

Setzt man nämlich $a + b = p$ und $ab = q$, so kommt die Form $x^2 - px + q = 0$ heraus, auf welche jede quadratische Gleichung gebracht werden kann. Hieraus ergibt sich auch, daß der Koeffizient $-p$ der ersten Potenz von x oder des zweiten Gliedes der Gleichung gleich sei der Summe und das dritte Glied gleich dem Produkte der beiden Werthe von x. Davon kann man sich auch in Zahlen überzeugen. Es ist z. B. oben bei dem Exempel S. 42. die quadratische Gleichung gefunden worden $y^2 - y\frac{173}{32} = -\frac{45}{8}$,
oder vernichtet $y^2 - y\frac{173}{32} + \frac{45}{8} = 0$,
und daraus die Werthe $y = 4$ thlr. und $y = 1\frac{13}{32}$ thlr. Nun

ist aber $4 + 1^{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\frac{7}{2}$ und $4 \cdot 1^{\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{4}{3}\frac{1}{2} = \frac{4}{3}\frac{1}{2}$, also wie es sein muß.

Eine vollständige kubische Gleichung hat die Form

$$x^3 \mp px^2 \mp qx \mp r = 0.$$

Da die höchste Potenz von x die dritte ist, so müssen, wenn die Gleichung durch eine Multiplikation entstehen soll, die Faktoren die Größe x dreimal enthalten. Es wird also das Produkt, dem die Gleichung äqual sein soll, drei Faktoren enthalten und in jedem die Größe x und noch eine Größe vorkommen, durch welche bei der Multiplikation die übrigen Glieder mit x^3 entstehen. Denn enthielte jeder Faktor bloß x, so wäre das Produkt auch bloß $= x^3$, aber nicht $= x^3 \mp px^2 \mp qx \mp r$. Es ist also x in jedem Faktor mit noch einer Größe verbunden und wir wollen diese Verbindung durch das Doppelzeichen $\mp$ ausdrücken, weil die zweite Größe sowol positiv als negativ sein kann. Es werden also die drei Faktoren sein $x \mp a$, $x \mp b$, $x \mp c$ und ihre Multiplikation wird Folgendes geben

$$(x \mp a)(x \mp b) = x^2 \mp (a+b)x + ab,$$
$$[x^2 \mp (a+b)x + ab](x \mp c) = x^3 \mp (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x \mp abc.$$

Diese Gleichung hat aber ganz die Form einer kubischen, denn setzen wir $a+b+c = p$, $ab+ac+bc = q$ und $abc = r$, so kommt ganz die obige kubische Gleichung

$$x^3 \mp px^2 \mp qx \mp r,$$

und diese wird $= 0$, sobald einer der obigen Faktoren $= 0$ gesetzt wird.

Es sei also $x \mp c = 0$, so muß c ein Werth von x sein und das entgegengesetzte Zeichen von x haben, wenn es mit demselben 0 ausmachen soll. Lassen wir also x als positiv stehen, so wird c negativ und der Faktor heißt $x - c$; ist aber x negativ, so ist c positiv und der Faktor ist $x + c$. Dividiren wir nun mit $x \mp c$ in

$$[x^3 \mp (a+b+c)]x^2 \mp (ab+ac+bc)x \mp abc = 0,$$

so ist der Quotient $= x^2 \mp (a+b)x + ab = 0$, weil 0 durch $x \mp c$ dividirt, auch den Quotienten $= 0$ gibt. Der Quotient ist aber eine vernichtete quadratische Gleichung, welche durch die Multiplikation von $x \mp a$ mit $x \mp b$ entsteht. Da nun die Gleichung $= 0$ ist, so muß wieder einer dieser Faktoren $= 0$, d. h. der andere Theil desselben ein Werth von x sein. Es sei $x \mp b = 0$, so ist b der Werth von x und also muß wieder b das entgegengesetzte Zeichen von x haben,

denn $x - b$ ist $= 0$, wenn x positiv und $x + b = 0$, wenn x negativ ist. Man dividire also mit $x + b$ in

$$x^2 \mp (a+b)x \mp ab = 0,$$

so kommt $x \mp a = 0$, weil 0, durch $x \mp b$ dividirt, zum Quotienten 0 gibt. Da nun $x \mp a$ auch $= 0$ ist, so ist a ein Werth von x und hat das entgegengesetzte Zeichen desselben. Folglich sind die anderen Theile der drei Faktoren sämmtlich Werthe von x und die kubische Gleichung hat drei Werthe, so wie sie drei Faktoren hat.

Wollte man annehmen, es gäbe in der Gleichung noch einen vierten Faktor, so könnte dieser weder die Größe x, noch sonst eine unbekannte Größe enthalten, weil im erstern Fall die höchste Potenz von x um einen Grad höher würde, was doch nicht sein soll, und im andern in der Gleichung noch eine unbekannte Größe vorkommen müßte. Er könnte also nur aus bekannten Größen bestehen und also allgemein durch $m \mp n$ ausgedrückt werden. Dann wäre

$$[x^3 \mp (a+b+c)x^2 \mp (ab+ac+bc)x \mp abc](m \mp n) = 0$$
$$= mx^3 \mp m(a+b+c)x^2 \mp m(ab+ac+bc)x \mp mabc$$
$$\mp nx^3 \mp n(a+b+c)x^2 \mp n(ab+ac+bc)x \mp nabc = 0$$
$$= (m \mp n)x^3 \mp (m \mp n)(a+b+c)x^2 \mp [m \mp n(ab+ac+bc)]x$$
$$\mp (m \mp n)abc = 0$$

und da man durchgängig mit $m \mp n$ dividiren kann, so käme, wie vorher,

$$x^3 \mp (a+b+c)x^2 \mp (ab+ac+bc)x \mp abc = 0.$$

Ein vierter Faktor würde also die Gleichung gar nicht verändern, also kann sie nur drei und nicht mehr, folglich x auch nicht mehr als drei Werthe haben.

Ganz auf dieselbe Art erhellet, daß eine Gleichung vom vierten Grade vier Faktoren und vier Werthe der unbekannten Größe enthalten und die Form

$$x^4 \mp (a+b+c+d)x^3 \mp (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$\mp (abc+abd+bcd)x \mp abcd = 0$$

haben werde, wenn die Faktoren $x \mp a$, $x \mp b$, $x \mp c$, $x \mp d$ und also a, b, c, d die Werthe von x sind. Bezeichnen wir die Koeffizienten der Glieder allgemein durch die Buchstaben A, B, C, D u. s. w., so ist die Form der quadratischen Gleichung

$$= x^2 \mp Ax \mp B = 0,$$

der kubischen $= x^3 \mp Ax^2 \mp Bx \mp C = 0,$

der vom vierten Grade $= x^4 \mp Ax^3 \mp Bx^2 \mp Cx \mp D = 0,$

u. s. w.

Jetzt läßt sich nun im Allgemeinen zeigen, daß, wenn der Satz für irgend einen Grad der Gleichung wahr ist, er auch für die Gleichung von dem um 1 höhern Grade wahr sein müsse; wenn er also wahr ist für die Gleichung vom nten Grade, so muß er auch wahr sein für die vom n+1ten. Es habe die Gleichung vom nten Grade die Form

$$x^n \mp Ax^{n-1} \mp Bx^{n-2} \mp Cx^{n-3} \mp \ldots \mp Px \mp Q = 0,$$

und sie enthalte n Faktoren, $x \mp a$, $x \mp b$, $x \mp c$ u. s. w., so soll, wenn man dieselbe noch mit einem Faktor $x \mp q$ multiplizirt, das daraus entstehende Produkt eine Gleichung vom n+1ten Grade sein und dieselbe Form haben. Man multiplizire also

$$x^n \mp Ax^{n-1} \mp Bx^{n-2} \mp Cx^{n-3} \mp \ldots \mp Px \mp Q = 0,$$

mit $x \mp q$

so kommt

$$x^{n+1} \mp Ax^n \mp Bx^{n-1} \mp Cx^{n-2} \mp \ldots \mp Px^2 \mp Qx$$
$$\mp qx^n \mp qAx^{n-1} \mp qBx^{n-2} \mp \ldots \ldots \mp qPx \mp qQ$$

Setzt man die gegebene Gleichung vom nten Grade $= z$ und das Produkt $z(x \mp q) = Y$, so ist

$$Y = x^{n+1} \mp (A \mp q)x^n \mp (B \mp Aq)x^{n-1} \mp (C \mp Bq)x^{n-2} \mp \ldots$$
$$\mp (Q \mp Pq)x \mp Qq = 0,$$

und setzen wir die Koeffizienten $A \mp q = A'$, $B \mp Aq = B'$, $C \mp Bq = C'$ u. s. w., $Q \mp Pq = Q'$ und $qQ = R$, so wird die Gleichung vom n+1ten Grade

$$= x^{n+1} \mp A'x^n \mp B'x^{n-1} \mp C'x^{n-2} + \ldots \mp Q'x + R = 0,$$

und es ist klar, daß diese dieselbe Form, wie die vom nten Grade habe, und fünf Faktoren, also auch so viel Werthe von x enthalte.

In Rücksicht der Eigenschaften der Koeffizienten der Glieder ergibt sich Folgendes. Es war die Gleichung vom

2ten Grade $= x^2 \mp (a+b)x \mp ab = 0$,

3ten " $= x^3 \mp (a+b+c)x^2 \mp (ab+ac+bc)x \mp abc = 0$,

4ten " $= x^4 \mp (a+b+c+d)x^3 \mp (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$
$\mp (abc+abd+bcd)x \mp abcd = 0.$

Hieraus ergibt sich, daß der Koeffizient des
zweiten Gliedes die Summe aller Werthe von x,
dritten Gliedes die Summe aller Produkte aus je zwei und zwei dieser Werthe,
vierten Gliedes die Summe aller Produkte aus je drei und drei derselben enthalte.

Bildet man noch die Gleichungen des fünften, sechsten, siebenten Grades u. s. w. aus ihren fünf, sechs, sieben Faktoren, so ergibt sich ferner, daß der Koeffizient des

fünften Gliedes die Summe aller Produkte aus je vier und vier Werthen,

sechsten Gliedes die Summe aller Produkte aus je fünf und fünf,

siebenten Gliedes die Summe aller Produkte aus je sechs und sechs, und überhaupt des

nten Gliedes die Summe aller Produkte aus je $n-1$ und $n-1$, endlich das lezte Glied das Produkt aus allen Werthen in sich begreift.

Die Allgemeinheit des Satzes läßt sich auch dadurch erweisen, daß man zeigt, wenn er für irgend einen Grad einer Gleichung gilt, so gilt er auch für den um 1 höheren Grad. Es gelte also für eine Gleichung des nten Grades

$$= x^n \mp Ax^{n-1} \mp Bx^{n-2} \mp Cx^{n-3} \mp \ldots \mp Px \mp Q = 0.$$

Multiplizirt man nun diese, um sie auf einen Grad höher zu bringen, mit $x \mp q$, so erhält man nach dem Obigen

$$x^{n+1} \mp (A \mp q)x^n \mp (B \mp Aq)x^{n-1} \mp (C \mp Bq)x^{n-2} + \ldots . \mp (Q + Pq)x \mp Qq = 0.$$

Nun ist A die Summe aller n, also auch $A \mp q$ die Summe aller $n+1$ Werthe;

B ist die Summe aller Produkte aus je zwei und zwei der n Werthen, folglich $B \mp Aq$ die Summe aller Produkte aus je zwei und zwei der $n+1$ Werthe, weil Aq alle Produkte aus n Werthen in den neuen Werth q ausdrückt;

C ist die Summe aller Produkte aus je drei und drei der n Werthe und da B alle Produkte aus je zwei und zwei der n Werthe ausdrückt, so ist $C + Bq$ die Summe aller Produkte aus je drei und drei der $n+1$ Werthe u. s. w.;

Qq aber ist ein Produkt aus allen $n+1$ Werthen, da Q ein Produkt aus allen n Werthen ist.

Nun gilt der Satz, wie gezeigt ist, für die vierte Potenz, also gilt er auch für die fünfte, und gilt er für diese, so gilt er auch für die sechste u. s. w.

Es ist also überhaupt erwiesen worden, daß jede höhere Gleichung die Form $x^m \mp Ax^{m-1} \mp Bx^{m-2} \mp Cx^{m-3} \mp \ldots Px \mp Q$ habe, daß jede so viel Wurzelgleichungen enthalte, als der Exponent der höchsten Potenz der unbekannten Größe Einheiten hat, daß sie eben so viel Faktoren in sich fasse, als die Zahl der Wurzelgleichungen beträgt und daß eben diese und keine anderen ihre Faktoren sind.

§. 55.

§. 55.

Zusatz.

Jede höhere Gleichung läßt sich durch eine ihrer Wurzelgleichungen ohne Rest dividiren und der Quotient ist eine um einen Grad niedere Gleichung. Denn da

$$x^m \mp Ax^{m-1} \mp Bx^{m-2} \mp \ldots \mp Q = 0$$

aus m Faktoren, $x \mp a$, $x \mp b$, $x \mp c$ u. s. w. besteht, so muß ihr Produkt, d. h. die Gleichung, durch einen dieser Faktoren dividirt, das Produkt aus allen übrigen $m-1$ Faktoren, d. h. eine um einen Grad niedere Gleichung zum Quotienten geben. Vermöge dieses Satzes kann man in vielen Fällen sich einen Weg bahnen, die Wurzeln einer Gleichung zu finden. Hat man z. B. von einer kubischen Gleichung den einen Werth gefunden, so bilde man aus demselben eine Wurzelgleichung und dividire nun dadurch die kubische, nachdem sie auf die vernichtete Form gebracht ist; so erhält man zum Quotienten eine quadratische Gleichung, aus der sich nun nach den obigen Regeln die beiden anderen Werthe finden lassen. Es sei z. B. eine kubische Gleichung gegeben

$$x^3 - 6x^2 - 31x + 120 = 0,$$

und ein Werth derselben sei $x = 3$. Dividirt man nun die Gleichung durch die Wurzelgleichung $x - 3 = 0$, so erhält man die quadratische $x^2 - 3x - 40 = 0$. Daraus ergibt sich

1) $x = \frac{3 + \sqrt{(9 + 4 \cdot 40)}}{2} = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8.$

2) $x = \frac{3 - \sqrt{(9 + 4 \cdot 40)}}{2} = \frac{3-13}{2} = -5.$

Es sind also $+3$, $+8$, -5 die drei Werthe der Gleichung und diese geben die Wurzelgleichungen $x - 3 = 0$, $x - 8 = 0$ und $x + 5 = 0$.

§. 56.

Zusatz.

Die Werthe einer Gleichung können nicht nur positiv und negativ, sondern auch ganze, gebrochene, rationale und irrationale, ja selbst unmögliche Größen sein. Diese letzteren lassen sich nach §. 6. allemal unter der Form $x = a\sqrt{-1}$ darstellen. Obgleich die unmöglichen Werthe im realen Sinne eigentlich gar keine sind, so entsprechen sie doch eben so gut, wie die wirklichen, der Form der Gleichung. Es sei z. B. die reine kubische Gleichung $x^3 = 64$ gegeben, so ist $x^3 - 64 = 0$

und $x = 4$ ein Werth derselben. Dividirt man nun mit $x-4$ in x^3-64, so kommt die quadratische Gleichung

$$x^2+4x+16 = 0.$$

Daraus ergibt sich 1) $x = -2+\sqrt{-12}$,
2) $x = -2-\sqrt{-12}$,

beide unmöglich, aber dennoch der Gleichung entsprechend. Nach man nämlich von jedem dieser Werthe den Kubus, so muß 64 und multiplizirt man die drei Wurzelgleichungen $x-4=0$, $x-(-2+\sqrt{-12})=0$ und $x-(-2-\sqrt{-12})=0$, oder $x+2-\sqrt{-12}=0$ und $x+2+\sqrt{-12}=0$ mit einander, so muß die ursprüngliche kubische Gleichung x^3-64 herauskommen.

Berechnung von $(-2+\sqrt{-12})^3$ und $(-2-\sqrt{-12})^3$.

$$\begin{array}{r} -2+\sqrt{-12} \\ -2+\sqrt{-12} \\ \hline 4-4\sqrt{-12}-12 \\ -8-4\sqrt{-12} = (-2+\sqrt{-12})^2 \\ -2+\sqrt{-12} \\ \hline 16+8\sqrt{-12} \\ -8\sqrt{-12}+48 \\ \hline 16+48 = 64 = (-2+\sqrt{-12})^3. \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{r} -2-\sqrt{-12} \\ -2-\sqrt{-12} \\ \hline 4+4\sqrt{-12}-12 \\ -8+4\sqrt{-12} = (-2-\sqrt{-12})^2 \\ -2-\sqrt{-12} \\ \hline 16-8\sqrt{-12} \\ +8\sqrt{-12}+48 \\ \hline 16+48 = 64 = (-2-\sqrt{-12})^3. \end{array}$$

Multiplikation der Wurzelgleichungen.

$$\begin{array}{r} x+2-\sqrt{-12} = 0 \\ x+2+\sqrt{-12} = 0 \\ \hline x^2+2x-x\sqrt{-12} \\ 2x+4-2\sqrt{-12} \\ +x\sqrt{-12}+2\sqrt{-12}+12 \\ \hline x^2+4x+16 = 0 \\ x-4 \\ \hline x^3+4x^2+16x \\ -4x^2-16x-64 \\ \hline x^3-64 = 0 \end{array}$$

§. 57.
Zusatz.

Wenn in einer Gleichung Glieder fehlen, so kommt dies daher, weil der Koeffizient derselben = 0 geworden ist, z. B. wenn in der Gleichung

$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + Ex^{m-5} + \ldots + Q = 0$

das dritte oder vierte Glied fehlt, so muß B oder C = 0 sein, weil dann $0 . x^{m-2}$ und $0 . x^{m-3}$ auch = 0 ist. Die Form ist dann

$x^m + Ax^{m-1} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} + \ldots + Q = 0,$

oder $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Dx^{m-4} + \ldots + Q = 0.$

Fehlt das zweite Glied Ax^{m-1}, so muß, da A der Summe der Wurzeln gleich ist, diese Summe = 0 sein, welches nur möglich ist, wenn die Gleichung entgegengesetzte Wurzeln enthält, die sich gegenseitig aufheben.

Fehlt das letzte Glied Q in einer Gleichung, so muß, weil dieses ein Produkt aus allen Wurzeln der Gleichung ist, wenigstens eine derselben = 0 sein, weil dann das Produkt auch = 0 ist. In diesem Falle kann man die Gleichung durch x dividiren und sie so auf einen nächst niedern Grad bringen. So z. B. wird aus $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$ die Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$

§. 58.
Erklärung.

Aus den Zeichen, welche die Glieder einer Gleichung haben, läßt sich beurtheilen, wie viel positive und negative Wurzeln in derselben Statt finden. Zu dem Ende pflegt man es eine Folge der Zeichen zu nennen, wenn zwei auf einander folgende Glieder der Gleichung einerlei Zeichen, beide + oder beide − haben, eine Abwechselung aber, wenn die Zeichen derselben verschieden sind.

§. 59.
Lehrsatz.

In jeder vollständigen Gleichung müssen so viel Wurzeln oder Werthe der unbekannten Größe enthalten sein, als Folgen und Abwechselungen in derselben vorkommen. Die Zahl beider ist nämlich immer um 1 kleiner, als die Zahl der Glieder.

Nun enthält aber jede vollständige Gleichung vom nten Grad $n+1$ Glieder, nämlich n Glieder, welche die Potenzen von bis zur ersten enthalten und dann noch ein Glied, das die ote Potenz von x enthalten würde, wenn diese nicht $= 1$ wä und also im Produkte der Wurzeln, dem das letzte Glied gle ist, wegfiele. Nun gibt das erste Glied mit dem zweiten, da zweite mit dem dritten u. s. w. und das vorletzte mit dem letzte eine Abwechselung oder Folge, das letzte Glied aber kann kei mehr geben, da kein neues Glied folgt, also gibt es überhaup nur n Abwechselungen und Folgen, folglich so viel als de Exponent der höchsten Potenz von x Einheiten hat, daher f viel, als die Gleichung Wurzeln enthält.

§. 60.

Lehrsatz.

Hat eine Gleichung lauter mögliche Wurzeln, so enthäl sie so viel positive, als Abwechselungen; und so viel negative, als Folgen der Zeichen vorkommen.

Dieser Satz kann in drei Fälle zerlegt werden. Es kön nen nämlich die Wurzeln 1) alle positiv, 2) alle negativ, 3) ein Theil positiv, der andere negativ sein.

Wir wollen also zuerst setzen, es seien alle Wurzeln positiv, also $x = a$, $x = b$, $x = c$ u. s. w. Ist die Gleichung vom zweiten Grade, so entsteht sie aus der Multiplikation der Faktoren $x-a$ und $x-b$. Das Produkt ist $x^2-(a+b)x+ab$. In dieser Gleichung sind aber zwei Abwechselungen und keine Folge enthalten, also so viel Abwechselungen, als es Wurzeln gibt, folglich der Satz für diesen Grad erwiesen.

Ist die Gleichung kubisch, so ist dieselbe ein Produkt aus $(x-a).(x-b).(x-c)$, folglich $= x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$. Sie enthält drei Abwechselungen und keine Folge, also so viel, als es Wurzeln gibt.

Eben so erhellt es auch bei der Gleichung vom vierten Gr

Nun läßt sich im Allgemeinen beweisen, daß, wenn Satz für den nten Grad wahr ist, er auch für den $n+1$ wahr sein müsse. Soll der Satz beim nten Grade Statt find so muß die Gleichung die Form haben

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm Q = 0.$$

Im letzten Gliede nämlich findet das Zeichen $+$ St wenn n gerade, und das Zeichen $-$, wenn n ungerade

Nun multiplizire man die Gleichung mit $x-u$, um sie auf den um 1 höhern Grad zu erheben, so erhält man

$$x^{n+1} - Ax^n + Bx^{n-1} - Cx^{n-2} + \ldots \pm Qx$$
$$- ux^n + uAx^{n-1} - uBx^{n-2} + \ldots \pm uPx \mp uQ.$$

Dies zusammen addirt, gibt die neue Gleichung vom $+1$ten Grade

$$= x^{n+1} - (A+u)x^n + (B+uA)x^{n-1} - (C+uB)x^{n-2} + \ldots$$
$$\pm (Q+uP)x \mp uQ = 0.$$

Hatte nun die vorige Gleichung n Abwechselungen und eben so viel positive Wurzeln, so hat die jetzige $n+1$ Abwechselungen, aber auch $n+1$ positive Wurzeln.

Da also der Satz von dem vierten Grade gilt, so gilt er auch vom fünften, und wenn er vom fünften gilt, so gilt er auch vom sechsten u. s. w., folglich allgemein.

Es seien zweitens alle Wurzeln negativ, so haben alle Faktoren der Gleichung die Form $x+a$, $x+b$, $x+c$ u. s. w. Diese, mit einander multiplizirt, geben lauter positive Glieder, also lauter Folgen, also so viel Folgen, als die Gleichung negative Wurzeln hat.

Der dritte Fall ist, wenn die Gleichung sowohl positive als negative Wurzeln enthält. Wir wollen wieder zuerst eine quadratische Gleichung betrachten, deren eine Wurzel positiv, die andere negativ ist. Ihre Faktoren sind daher $x+a$ und $x-b$ und deren Produkt $= x^2 + (a-b)x - ab$. Der Koeffizient $a-b$ ist entweder positiv oder negativ, je nachdem a größer oder kleiner ist als b. Die Gleichung heißt daher, wenn $A = a-b$ gesetzt wird, entweder $x^2 + Ax - ab$ oder $x^2 - Ax - ab$. In jedem Falle ist aber eine Abwechselung und eine Folge und auch eine positive und eine negative Wurzel.

Nehmen wir eine kubische Gleichung, so können unter ihren drei Wurzeln entweder zwei positive und eine negative, oder zwei negative und eine positive sein. Im ersten Falle entsteht die Gleichung aus dem Produkte

$$(x-a).(x-b).(x+c) = x^3 - (a+b-c)x^2 - (ac+bc-ab)x$$
$$+ abc = 0.$$

In dieser ist im zweiten Gliede entweder $a+b$ größer als c oder kleiner, also der Koeffizient des zweiten Gliedes entweder positiv oder negativ. Ist also dieser Koeffizient $= A$, so ist das zweite Glied entweder $-Ax^2$ oder $+Ax^2$. Im dritten

Glieds iſt $ac+bc$ allemal größer als ab, wenn c größer als $a+b$ iſt, alſo das zweite Glied poſitiv wird. Denn

$$ac+bc-ab = c(a+b)-ab.$$

Iſt nun $c = a+b$, ſo wäre

$$c(a+b) = (a+b).(a+b) = a^2+2ab+b^2,$$

folglich offenbar größer als ab, um ſo mehr aber muß $c(a+b)$ noch größer ſein, als ab, wenn c größer als $a+b$ iſt. In dieſem Falle aber iſt $ac+bc-ab$ immer poſitiv, alſo $-(ac+bc-ab)$ negativ, und wir können dieſen Ausdruck $= -B$ ſetzen. Für den Fall alſo, wo c größer iſt, als $a+b$, iſt die Form der Gleichung

$$= x^3+Ax^2-Bx+Q = 0.$$

Sie enthält zwei Folgen und zwei Abwechſelungen. Die Folge bildet das erſte und zweite Glied, die erſte Abwechſelung das zweite und dritte, die zweite Abwechſelung das dritte und vierte. Folglich ſtimmt die Gleichung mit der Behauptung des Satzes überein.

Iſt c kleiner als $a+b$, ſo wird der Koeffizient des zweiten Gliedes negativ; der des dritten Gliedes kann poſitiv oder negativ ſein, je nachdem $ac+bc$ kleiner oder größer als ab iſt, in jedem Falle aber entſteht eine Gleichung, die zwei Abwechſelungen und eine Folge hat. Im erſten nämlich die Gleichung:

$$x^3-Ax^2+Bx+Q = 0,$$

wo das erſte mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten zwei Abwechſelungen und das dritte mit dem vierten eine Folge bilden; im andern Falle aber die Gleichung:

$$x^3-Ax^2-Bx+Q = 0,$$

wo das erſte mit dem zweiten eine Abwechſelung, das zweite mit dem dritten eine Folge, das dritte mit dem vierten wieder eine Abwechſelung geben. Alſo ſtimmen auch in dieſem Falle die Gleichungen mit der Behauptung des Satzes.

Der Fall, daß $c = a+b$ iſt, gehört eigentlich nicht hierher, weil dadurch der Koeffizient des zweiten Gliedes, folglich das ganze zweite Glied $= 0$ wird, alſo die Gleichung nicht vollſtändig bleibt.

Enthält die kubiſche Gleichung zwei negative und eine poſitive Wurzel, ſo entſteht ſie aus der Multiplikation von $(x+a).(x+b).(x-c)$, und das Produkt iſt

$$x^3+(a+b-c)x^2-(ac+bc-ab)x-abc.$$

Iſt, wie im Vorigen, die Wurzel c größer als $a+b$, ſo wird der Koeffizient des zweiten Gliedes $= -A$, im dritten aber iſt, wie vorher, ab immer kleiner als $ac+bc$, folglich

r Koeffizient immer $= -B$. Die Gleichung hat also die
orm $x^3 - Ax^2 - Bx - abc$,
so eine Abwechselung und zwei Folgen.

Ist c kleiner als $a+b$, so ist A positiv, B aber entweder positiv oder negativ, je nachdem ab größer oder kleiner als $ac+bc$. Die Gleichung hat also entweder die Form
$x^3 + Ax^2 + Bx - abc$,
oder $x^3 + Ax^2 - Bx - abc$,
also in jedem Falle zwei Folgen und eine Abwechselung.

So wäre also der Satz für die kubische Gleichung vollständig erwiesen.

Nun läßt sich aber auch im Allgemeinen zeigen, daß, wenn bei einer Gleichung die Zahl der positiven Wurzeln um eine vermehrt und so eine um einen Grad höhere Gleichung gebildet wird, die Zahl der Abwechselungen auch um eine vermehrt werden müsse.

Es sei eine Gleichung

$$z = x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} \ldots + Px + Q = 0.$$

Nun nehme man für x noch einen positiven Werth, $x = q$ und multiplizire die Gleichung mit $x - q$, so kommt eine Reihe Y gleich der folgenden Reihe 1 + der Reihe 2.

1) $x^{n+1} - Ax^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px^2 + Qx$

2) $\quad - qx^n + qAx^{n-1} + qBx^{n-2} \ldots\ldots - qPx - qQ.$

Die Reihe 1 enthält mit der Reihe z einerlei Zeichen, also eben so viel Abwechselungen und Folgen; sie unterscheidet sich von z nur dadurch, daß jede Potenz von x um einen Grad erhöhet ist. In der Reihe 2 hat jedes Glied das entgegengesetzte Zeichen von z, daher muß es auch eben so viel Abwechselungen und Folgen wie in z geben.

Soll nun in der neuen Gleichung Y, die durch Addition von 1 und 2 entsteht, eine andere Ordnung der Zeichen, als in z Statt finden, so ist dies nur dadurch möglich, daß bei der Addition der Glieder in 1 und 2 vermöge der Beschaffenheit der Quotienten die Zeichen der Koeffizienten verändert werden. Wenn man z. B. im dritten Gliede von 1 und im zweiten von 2 die Koeffizienten $-B$ und $+qA$ addirt, so wird das dritte Glied der Reihe Y entweder $+$ oder $-$, je nachdem qA oder B größer ist. Im ersten Falle wird das Zeichen der Reihe 1 in das der Reihe 2, im andern das der Reihe 2 in das der Reihe 1 verwandelt. Das Erstere wollen wir einen Übergang, das Letztere einen Rückgang nennen. Nun hat alle-

mal das erſte, zweite, dritte, überhaupt nte Glied der Reihe 2 das entgegengeſetzte Zeichen vom erſten, zweiten, dritten, nten Gliede der Reihe 1, alſo auch das entgegengeſetzte vom erſten, zweiten, dritten, nten Gliede der Gleichung z. Da nun einmal das m+1te Glied der Reihe 1 mit dem nten der Reihe 2 addirt wird, ſo iſt ein Übergang nur dann möglich, wenn das nte Glied in z, alſo auch das nte in 1 mit dem folgenden m+1ten einerlei Zeichen, alſo dieſes das entgegengeſetzte Zeichen vom nten in 2 hat. Es müſſen alſo das nte und m+1te in 1 entweder beide + oder beide — haben; im erſten Falle hat das nte in der zweiten Reihe — und im andern Falle +. Geſchieht nun bei der Addition ein Übergang, bekommt alſo das m+1te Glied in Y das Zeichen des nten Gliedes in 2, ſo findet allemal eine Abwechſelung Statt, denn das m+1te Glied bekommt alsdann das entgegengeſetzte Zeichen vom nten. Jeder Übergang vermehrt alſo die Zahl der Abwechſelungen und mit die Folgen. Mögen daher durch die Rückgänge die Abwechſelungen oder Folgen vermehrt werden, ſo wird doch die Summe aller Über- und Rückgänge die Abwechſelungen wenigſtens um eine vermehren, weil die Zahl der Übergänge die Zahl der Rückgänge um einen übertreffen muß; denn das letzte Glied von Y beſteht ſtets aus dem letzten Gliede der Reihe 2 allein und hat alſo immer das entgegengeſetzte Zeichen vom vorletzten Gliede. Die Reihe Y hat daher immer wenigſtens eine Abwechſelung mehr, als z hatte.

Wird dagegen in einer Gleichung die Zahl der negativen Wurzeln um eine vermehrt, ſo muß auch die Zahl der Folgen wenigſtens um eine vermehrt werden.

Man multiplizire die Reihe z noch mit dem Faktor x+q, indem man x = —q ſetzt, ſo beſteht die neue Gleichung Y wieder aus den folgenden Reihen 1 und 2, nämlich

1) $x^{n+1} - Ax^n - Bx^{n-1} + Cx^{n-2} \ldots + Px^2 + Qx$

$+ qx^n - qAx^{n-1} - qBx^{n-2} \ldots\ldots + qPx + qQ.$

Die erſte ſowol, als die zweite Reihe hat mit z ganz einerlei Zeichen und daher das nte Glied in 2 mit dem nten in 1 dasſelbe Zeichen. Eine Veränderung der Zeichen in Y kann daher wieder nur durch die Addition der Koëffizienten entſtehen. Übergänge können aber nur in dem Falle eintreten, wenn das m+1te Glied in 1 das entgegengeſetzte Zeichen vom nten in 2, alſo auch das entgegengeſetzte vom nten in z hat. Jeder Übergang gibt alsdann eine Folge und nie eine Abwechſelung.

Folgen nun die Rückgänge Folgen oder Abwechselungen geben, so ist doch stets die Zahl der Übergänge um einen größer, als die Zahl der Rückgänge, da das letzte Glied in Y wieder aus dem letzten in 2 allein besteht, folglich immer durch einen Übergang gebildet wird. Es muß also die Zahl der Folgen wenigstens um eine vermehrt werden.

Mit jedem neuen positiven Werthe von x wird also die Zahl der Abwechselungen in der neuen Gleichung wenigstens um eine, und mit jedem neuen negativen Werthe die Zahl der Folgen wenigstens um eine vermehrt. Es kann daher die Zahl der Abwechselungen nicht kleiner sein, als die Zahl der positiven, und die Zahl der Folgen nicht kleiner, als die Zahl der negativen Werthe.

Setzt man nun die Zahl der positiven Wurzeln in einer Gleichung $= N$, die Zahl der negativen $= M$, die Zahl der Abwechselungen $= n$ und die der Folgen $= m$, so ist erstlich wegen §. 59. $N+M$, d. h. die Gesammtheit der Wurzeln, $= n+m$, d. h. der Summe der Abwechselungen und Folgen. Da nun n nicht kleiner sein kann, als N, und m nicht kleiner, als M, so muß $n = N$ und $m = M$ sein, denn wäre $n > N$, so müßte $m < M$ sein, da $N+M = n+m$ ist, aber es ist bewiesen, daß m nicht kleiner als M sein kann.

§. 61.

Zusatz.

Vorstehender Satz zeigt, wie man aus der Beschaffenheit der Zeichen die Zahl der positiven und negativen Wurzeln in einer Gleichung im voraus wissen könne, angenommen, daß die Gleichung bloß mögliche Wurzeln enthalte. Um nun zu beurtheilen, ob auch unmögliche Werthe Statt finden, merke man Folgendes.

Wenn in einer höhern Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln enthält, ein Glied fehlt, so ist der Grund davon der, daß der Koeffizient dieses Gliedes bei der Addition des Produkts aus den Wurzelgleichungen $= 0$ geworden ist, die Glieder müssen sich also wechselseitig aufgehoben haben. War z. B. bei der Summirung der Produkte im vorigen Paragraphen im dritten Gliede von Reihe 1 und im zweiten von Reihe 2 der Koeffizient $-B = +qA$, so ist $-B+qA$ zusammen $= 0$, also auch das ganze Glied $(qA-B)x^{n-3}$ in der Gleichung $Y = 0$, es wird folglich in derselben fehlen. Da nun ein Glied $= 0$ sowohl $+0$ als -0 gelesen werden kann, so müssen beide

Zeichen in der Gleichung dieselbe Anzahl von Folgen und Abwechselungen geben; ist dies nicht der Fall, so enthält die Gleichung unmögliche Wurzeln. Es sei z. B. die kubische Gleichung gegeben $x^3 - Bx + C = 0$.

Hier ist das zweite Glied $= 0$; ergänzt man nun dieses, so kommt, wenn man es $= +0$ setzt,

$$x^3 + 0x^2 - Bx + C = 0.$$

Diese Gleichung hat eine Folge und zwei Abwechselungen. Setzt man nun das zweite Glied $= -0$, so kommt

$$x^3 - 0x^2 - Bx + C = 0,$$

welche Gleichung auch zwei Abwechselungen und eine Folge hat. Die gegebene Gleichung enthält also lauter mögliche Wurzeln. Hätte aber die Gleichung geheißen

$$x^3 + Bx + C = 0,$$

so hätten die Ergänzungen mit $+0$ und -0 gegeben

$$x^3 + 0x^2 + Bx + C = 0,$$

und

$$x^3 - 0x^2 + Bx + C = 0,$$

im ersten Falle lauter Folgen, im zweiten Falle zwei Folgen und eine Abwechselung. Da es nun unmöglich ist, daß in einer und derselben Gleichung einmal lauter negative Werthe, das andere Mal ein positiver unter den übrigen negativen Werthen enthalten sein könne, so enthält die gegebene Gleichung unmögliche Wurzeln.

Fehlen zwei Glieder hinter einander, so enthält die Gleichung gewiß unmögliche Wurzeln, weil man die Zeichen der fehlenden Glieder immer so wählen kann, daß eine verschiedene Zahl von Folgen und Abwechselungen entsteht. Ist z. B. die Gleichung gegeben

$$x^4 - Dx + E = 0,$$

so gibt es folgende Ergänzungen

1) $x^4 + 0x^3 + 0x^2 - Dx + E = 0,$
2) $x^4 + 0x^3 - 0x^2 - Dx + E = 0,$
3) $x^4 - 0x^3 + 0x^2 - Dx + E = 0,$
4) $x^4 - 0x^3 - 0x^2 - Dx + E = 0.$

Es hat aber die Reihe 1 zwei Folgen und zwei Abwechselungen, die Reihe 2 ebenfalls, die Reihe 3 lauter Abwechselungen und keine Folge, und die Reihe 4 wieder zwei Abwechselungen und zwei Folgen. Also enthält die Gleichung unmögliche Wurzeln.

§. 62.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung rational ist, d. h. lauter rationale Koeffizienten der Glieder enthält, so hat dieselbe, wenn sie un-

mögliche Wurzeln in sich begreift, dieselben allemal paarweise, die eine von der Form $a+b\sqrt{-1}$, die andere von der Form $a-b\sqrt{-1}$.

Dieser Satz wird so bewiesen. Jede unmögliche Größe entsteht, wenn die Wurzel einer Potenz mit geraden Exponenten aus einer negativen Zahl gezogen werden soll, weil jede negative und positive Zahl auf eine Potenz mit geradem Exponenten erhoben, allemal ein positives Produkt gibt, also eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl unmöglich wird. Soll also eine Wurzel aus $-b$ unmöglich sein, so muß der Exponent der Wurzel gerade sein; folglich die Form $2n$ haben. Die allgemeine Form jeder unmöglichen Größe ist daher $\sqrt[2n]{-b}$, wofür man, wie schon oben gezeigt ist, $b\sqrt[2n]{-1}$ setzen kann. Dieser Ausdruck ist wieder $= b\sqrt[n]{(\sqrt{-1})}$. Ist nun n ungerade, so ist $\sqrt[n]{-1} = -1$, und folglich verwandelt sich $b\sqrt[2n]{-1}$ in $b\sqrt{-1}$. Ist n gerade, so geht die Reduktion nicht unmittelbar an, weil dann $\sqrt[n]{-1}$ nicht rational wird, aber es läßt sich auch für diesen Fall zeigen, daß die Form $b\sqrt[2n]{-1}$ auf $b\sqrt{-1}$ gebracht werden könne, welcher Beweis aber hier zu umständlich wäre. Ferner besteht jede unmögliche Größe entweder bloß aus einem unmöglichen, oder aus einem möglichen und unmöglichen Theil. Im ersten Falle ist sie $= \mp b\sqrt{-1}$, im andern $a \mp b\sqrt{-1}$. Setzt man aber $a = 0$, so entsteht die erste Form, folglich kann $a \mp b\sqrt{-1}$ als die allgemeine Form gelten.

Da nun in einer rationalen Gleichung der Koeffizient des zweiten Gliedes allemal die Summe, der des letzten das Produkt aller Wurzeln enthält, so müssen die in der Gleichung vorhandenen unmöglichen Wurzeln von der Art sein, daß ihre Summe sowohl als ihr Produkt eine mögliche Zahl gibt. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn sowohl beim Addiren, als Multipliziren ihr unmöglicher Theil sich aufhebt, also wenn sie paarweise vorhanden sind, 2, oder 4, oder 6, oder 8 u. s. w., die eine von der Form $a+b\sqrt{-1}$, und die andere von der Form $a-b\sqrt{-1}$, denn die Summe derselben ist $2a$ und ihr Produkt a^2+b^2. So viel nun auch solcher Paare vorhanden

ſind, ſo iſt doch Summe und Produkt jedes Paares immer etwas Mögliches, folglich auch die Summen und Produkte von allen. Wäre aber die Zahl der unmöglichen Wurzeln ungerade, alſo $= 2n + 1$, wo n jede gerade oder ungerade Zahl bedeuten kann, ſo wäre wohl die Summe oder das Produkt von $2n$ Wurzeln etwas Mögliches; aber weil man dieſe mögliche Größe noch zu einer unmöglichen addirt oder damit multiplizirt werden müßte, ſo enthält Summe und Produkt wieder etwas Unmögliches und die Koefizienten der Gleichung könnten nicht lauter rationale Zahlen ſein.

Dieſer Satz gilt auch für irrationale Wurzeln. Man braucht nur im obigen Beweiſe $a \pm \sqrt{b}$ ſtatt $a \pm b\sqrt{-1}$ zu ſchreiben.

Eben ſo folgt hieraus auch, daß jede rationale höhere Gleichung, deren höchſte Potenz der unbekannten Größe einen ungeraden Exponenten hat, wenigſtens eine mögliche Wurzel enthalten müſſe. Denn ſie hat ſo viel Wurzeln, als der Exponent der höchſten Potenz von x anzeigt, alſo eine ungerade Anzahl von Wurzeln. Da nun die unmöglichen Wurzeln nur paarweiſe, alſo in gerader Zahl vorhanden ſein können, ſo muß wenigſtens eine Wurzel möglich ſein. Hat ſie aber mehrere mögliche Wurzeln, ſo iſt die Zahl derſelben immer ungerade, weil ſonſt die Zahl der unmöglichen nicht gerade wäre.

Eine rationale höhere Gleichung aber mit einem geraden Exponenten hat entweder gar keine mögliche Wurzel, oder eine gerade Anzahl derſelben.

§. 63.

Lehrſatz.

Wenn eine höhere Gleichung z gegeben iſt, die lauter mögliche Wurzeln enthält, und man multiplizirt dieſelbe mit $x + q$, ſo wird die neue Gleichung eben ſo viel Abwechſelungen als z und multiplizirt man ſie mit $x - q$, eben ſo viel Folgen der Zeichen, als z enthalten, es mag q eine Zahl ſein, was es für eine will.

Dieſer Satz fließt unmittelbar aus §. 60. Die Summe der Folgen und Abwechſelungen iſt in der neuen Gleichung Y um 1 größer als in z. Multiplizirt man nun mit $x + q$, ſo wird die Zahl der Folgen um 1 vermehrt, alſo bleibt die Zahl der Abwechſelungen in Y wie in z; multiplizirt man aber mit $x - q$, ſo wird in Y die Zahl der Abwechſelungen um eine vermehrt, alſo bleibt die Zahl der Folgen in Y, wie in z.

Vermöge dieses Satzes aber kann man prüfen, ob eine gegebene höhere Gleichung unmögliche Wurzeln enthalte. Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3+4x^2-8x+16 = 0,$$

multipl. man nun diese mit $x+q$,

so kommt

$$\left\{\begin{matrix} x^4+4x^3-8x^2+16x \\ +qx^3+4qx^2-8qx+16q \end{matrix}\right\} = 0.$$

Durch die Addition entstehen Übergänge im dritten, vierten und letzten Gliede. Setzt man nun $4q > 8$, also auch $8q > 16$, so wird das dritte Glied positiv, das vierte negativ und Y hat die Form $x^4+Ax^3+Bx^2-Cx+Q = 0$.

Nimmt man $4q < 8$, also auch $8q < 16$, so erhält Y die Form

$$x^4+Ax^3-Bx^2+Cx+Q = 0.$$

In beiden Fällen hat die Gleichung Y so viel Abwechselungen als z. Ob aber unmögliche Wurzeln in z sind, kann man noch nicht sehen. Setzt man aber $4q = 8$, also auch $8q = 16$, so fällt das dritte und vierte Glied weg, und die Gleichung hat die Form

$$x^4+Ax^3+Q = 0,$$

enthält also unmögliche Wurzeln. Da nun der unmögliche Werth nicht erst durch die Multiplikation hineingekommen seyn kann, so muß schon z unmögliche Wurzeln enthalten und zwar zwei, da die ganze Gleichung z nur drei Wurzeln hat.

Es sei eine andere Gleichung

$$z = x^3-3x^2+16x-12x = 0,$$

multiplizirt man sie mit $x+q$

so kommt

$$\left\{\begin{matrix} x^4-3x^3+16x^2-12x \\ +qx^3-3qx^2+16qx-12q \end{matrix}\right\} = 0.$$

Setzt man nun $q = 4$, so erhält man

$$Y = x^4+x^3+4x^2+52x-48 = 0.$$

Sollte nun Y lauter mögliche Wurzeln enthalten, so wären diese, da in Y nur eine Abwechselung Statt findet, drei negative und eine positive, und da durch die Multiplikation mit $x+q$ eine negative zu den Wurzeln in z hinzu gekommen ist, so müßte z eine positive und zwei negative enthalten. Allein da z lauter Abwechslungen hat, so müßte sie lauter positive Wurzeln haben. Dies widerspricht dem vorigen, folglich sind unmögliche Wurzeln in z.

Dagegen läßt sich nicht umgekehrt behaupten, daß eine Gleichung z lauter mögliche Wurzeln enthalte, wenn sie mit

$x+q$ oder $x-q$ multiplizirt eine Gleichung Y gibt, die eben so viele Abwechselungen, oder eben so viele Folgen als z hat.

Einige Veränderungen, die sich mit Gleichungen vornehmen lassen.

§. 64.

Aufgabe.

Jede Wurzel einer gegebenen Gleichung z um eine beliebige Größe q zu vermehren oder zu vermindern.

Man setze in der Gleichung z anstatt x überall $y+q$ oder $y-q$. Im ersten Falle ist $y=x-q$, im zweiten $y=x+q$, also y ein um q kleinerer oder größerer Werth von x. Aus dieser Operation wird nun eine Gleichung Y entstehen, die denselben Grad wie z hat, und deren Wurzeln um q kleiner oder größer sind, als die Wurzeln von z.

Es sei $z=x^3+x^2-4x-4=0$.

Ist nun $x=y+q$, so ist

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& (y-q)^3 = y^3+3qy^2+3q^2y+q^3 \\ x^2 &=& (y+q)^2 = y^2+2qy+q^2 \\ -4x &=& -4(y+q) = -4y-4q \\ -4 &=& -4 \end{array}$$

Also $Y=y^3+(3q+1)y^2+(3q^2+2q-4)y+q^3+q^2-4q-4=0$.

Es sei $q=1$, so ist

$$Y=y^3+4y^2+y-6=0.$$

Die drei Wurzeln von z sind $x=2$, $x=-2$, $x=-1$, alsdann werden die drei Wurzeln von Y sein: $y=1$, $y=-3$, $y=-2$, welche alle um 1 kleiner sind, als in z, da die verneinten Wurzeln kleiner werden, wenn ihr numerischer Werth größer wird.

Ist $x=y-q$, so hat man

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& (y-q)^3 = y^3-3qy^2+3q^2y-q^3 \\ x^2 &=& (y-q)^2 = y^2-2qy+q^2 \\ -4x &=& -4(y-q) = -4y-4q \\ -4 &=& -4 \end{array}$$

Also $Y=y^3-(3q-1)y^2+(3q^2-2q-4)y-q^3+q^2+4q-4$.

Es sei $q=1$, so ist

$$Y=y^3-2y^2-3y=0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch y dividiren und der Quotient ist

$$y^2-2y-3=0.$$

Daß in der Gleichung Y das letzte Glied weggefallen ist, also eine Division mit y möglich war, ist ein Zeichen, daß eine von den Wurzeln in $z = \pm q$ sein müsse, wodurch eben in eine der Wurzeln $= o$ ward, also die kubische Gleichung in eine vom zweiten Grade sich verwandelt.

§. 65.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen Gleichung z, worin das zweite Glied vorhanden ist, eine andere Y von demselben Grade zu machen, worin das zweite Glied fehlt.

Es sei die gegebene Gleichung

$$z = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \ldots + q = o.$$

Man schreibe in derselben überall $x+p$ anstatt x, so erhält man

$$= (x+p)^n = x^n + \frac{n}{1}px^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}p^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^3x^{n-3} \ldots$$

$$^1 = a(x+p)^{n-1} = ax^{n-1} + a\frac{n-1}{1}px^{n-2} + a\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}p^2x^{n-3} \ldots$$

$$^2 = b(x+p)^{n-2} = bx^{n-2} + b\frac{n-2}{1}x^{n-3} + \ldots,$$

$$^3 = c(x+p)^{n-3} = cx^{n-3} \ldots$$

$$= q \qquad = q$$

$$Y = x^n + \left(\frac{n}{1}p + a\right)x^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)}{1.2}p^2 + \frac{n-1}{1}ap + b\right)x^{n-2}$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}p^3 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}ap^2 + \frac{n-2}{1}bp + c\right)x^{n-3} \ldots + q = o$$

Soll nun, hier das zweite Glied fehlen, so muß $np + a = o$, also $np = -a$ und $p = -\frac{a}{n}$ sein. Daraus ergibt sich die Regel: Man dividire den Koeffizienten des zweiten Gliedes von z durch den Exponenten des ersten Gliedes, gebe dem Quotienten das entgegengesetzte Zeichen vom Koeffizienten des zweiten Gliedes in z und setze ihn mit diesem zu. m. Schreibt man nun diese Größe überall anstatt x, so erhält man eine Gleichung Y, in der das zweite Glied fehlt.

Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = o.$$

Dividirt man nun -5 durch 3 und ſetzt den Quotienten mit entgegengeſetztem Zeichen zu x, ſo kommt $x+\frac{5}{3}$. Dieſe Größe anſtatt x geſchrieben, kommt

$$\begin{array}{rcl} x^3 = & (x+\frac{5}{3})^3 = & x^3+5x^2+\frac{25}{3}x+\frac{125}{27} \\ -5x^2 = & -5(x+\frac{5}{3})^2 = & -5x^2-\frac{50}{3}x-\frac{125}{9} \\ -2x = & -2(x+\frac{5}{3}) = & -2x-\frac{10}{3} \\ +24 & = & +24 \end{array}$$

Alſo $Y = x^3 - \frac{31}{3}x + \frac{308}{27} = 0$.

Es wird durch dieſe Aufgabe die Aufſuchung der Wurzeln ſehr erleichtert, weil, da das zweite Glied fehlt, die Summe der Wurzeln $= 0$ ſein muß, alſo die Wurzeln ſo beſchaffen ſein müſſen, daß ſie ſich gegenſeitig aufheben. Da das letzte Glied $\frac{308}{27}$ ein Produkt aus allen Wurzeln iſt, die Gleichung aber nur 3 haben kann, ſo zerfälle man dies Glied in Faktoren und wähle dieſe ſo, daß ſie zuſammen $= 0$ werden. Nun beſteht $\frac{308}{27}$ aus $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{11}{3}$, und wenn man die erſten beiden poſitiv und die letztere negativ ſetzt, ſo iſt ihre Summe $\frac{4}{3}+\frac{7}{3}-\frac{11}{3}=0$. Nimmt man nun $\frac{4}{3}$ als einen Werth von x und bindet mit der Wurzelgleichung $x-\frac{4}{3}$ in $x^3-\frac{31}{3}x+\frac{308}{27}$, ſo geht die Diviſion auf und es kommt die quadratiſche Gleichung

$$x^2+\frac{4}{3}x-\frac{77}{9},$$

die noch eine poſitive und eine negative Wurzel haben muß, da ſie eine Folge und eine Abwechſelung hat. Nach der Regel für die Auflöſung ſolcher Gleichungen iſt

$$x = \frac{-\frac{4}{3}\mp\sqrt{(\frac{16}{9}+\frac{77\cdot 4}{9})}}{2} = \frac{-\frac{4}{3}\mp\sqrt{\frac{324}{9}}}{2} = \frac{-\frac{4}{3}\mp\frac{18}{3}}{2},$$

alſo entweder

$$x = \frac{-\frac{4}{3}+\frac{18}{3}}{2} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3},$$

oder

$$x = \frac{-\frac{4}{3}-\frac{18}{3}}{2} = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}.$$

Die Wurzeln von Y ſind alſo: $x=\frac{4}{3}$, $x=\frac{7}{3}$, $x=-\frac{11}{3}$.

Daraus findet man nun aber leicht die Wurzeln von z, wenn man das von den gefundenen Werthen wieder wegnimmt, was man zu den Werthen in z hinzugeſetzt hatte, um die Gleichung Y zu bilden. Es war $-\frac{5}{3}$ mit entgegengeſetztem Zeichen zu x geſetzt worden, alſo nehme ich von den Werthen in Y auch $-\frac{5}{3}$ wieder weg, d. h. ich addire es zu denſelben mit entgegengeſetztem Zeichen, ſo kommt die eine Wurzel von

z =

$= \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$, der andere $\frac{7}{3} + \frac{5}{3} = \frac{12}{3} = 4$, der dritte $-\frac{11}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{6}{3} = -2$.

§. 66.

Aufgabe.

Die Wurzeln einer gegebenen Gleichung z durch eine beliebige Größe q zu multipliziren oder zu dividiren.

Es sei die Gleichung

$$z = x^3 + ax^2 - bx - d = 0.$$

Sollen nun die Wurzeln mit q multiplizirt werden, so kommt qx, und ist $qx = y$, so wird $x = \frac{y}{q}$. Diesen Werth setze man überall statt x, so entsteht die neue Gleichung Y. Also $x^3 = \frac{y^3}{q^3}$, $ax^2 = \frac{ay^2}{q^2}$, $-bx = -\frac{by}{q}$.

folglich $Y = \frac{y^3}{q^3} + \frac{ay^2}{q^2} - \frac{by}{q} - d = 0$.

Bringt man nun alle Glieder auf einerlei Nenner, d. h. multiplizirt man alle durch q^3, so kommt

$$Y = y^3 + aqy^2 - bq^2y - q^3d = 0.$$

Sollen die Wurzeln von z durch q dividirt werden, so ist $\frac{x}{q} = y$, also $x = qy$. Diesen Werth setze man wieder überall statt x, so erhält man

$$Y = q^3y^3 + aq^2y^2 - bqy - d = 0,$$

und alle Glieder durch q^3 dividirt, kommt

$$Y = y^3 + \frac{a}{q}y^2 - \frac{b}{q^2}y - \frac{d}{q^3} = 0,$$

Betrachtet man die Gleichung Y, welche durch die Multiplikation der Wurzeln mit q entstanden ist, genauer, so ergibt sich, daß diese Multiplikation geschieht, wenn man unter die Glieder der Gleichung z die Potenzen von q in umgekehrter Ordnung der Potenzen von x schreibt und die unter einander stehenden Glieder multiplizirt. Es war

$$z = x^3 + ax^2 - bx^1 - dx^0 = 0,$$

also $q^0 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^3$,

so kommt $Y = x^3q^0 + aq^1x^2 - bq^2x^1 - dq^3x^0 = 0$,

oder $Y = x^3 + aqx^2 - bq^2x - dq^3 = 0$.

Die Gleichung Y aber, welche durch die Division der Wurzeln mit q entsteht, ergibt sich, wenn man unter die Glieder von z die Potenzen von q in umgekehrter Ordnung der

Potenzen von x schreibt und mit diesen in das Obenstehende dividirt. Es war

$$z = x^3 + ax^2 - bx^1 - dx^0 = 0,$$

also $q^0 \quad q^1 \quad q^2 \quad q^3$,

so kommt $Y = \frac{x^3}{q^0} + \frac{a}{q^1}x^2 - \frac{b}{q^2}x^1 - \frac{d}{q^3}x^0 = 0,$

oder $x^3 + \frac{a}{q}x^2 - \frac{b}{q^2}x - \frac{d}{q^3} = 0.$

Der Multiplikation bedient man sich, um die Brüche aus einer Gleichung wegzuschaffen. Man muß zu dem Ende mit einer Zahl multipliziren, in deren Potenzen alle Nenner der vorhandenen Brüche aufgehen. Es sei z. B. die gegebene Gleichung $z = x^3 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{11}{24}x - \frac{1}{4} = 0.$

Man wähle also zum Multiplikator eine Zahl, in deren ersten Potenz der Nenner 12, in der zweiten der Nenner 24 u. s. w. aufgeht. Dies ist die Zahl 12. Also schreibe man

$$\begin{array}{cccc} x^3 + \frac{7}{12}x^2 - \frac{11}{24}x - \frac{1}{4} = 0 \\ 12^0 \quad 12^1 \quad 12^2 \quad 12^3 \end{array}$$

und multiplizire, so kommt $x^3 + 7x^2 - 66x - 432 = 0.$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+8, -6, -9$, daher die Wurzeln von $z = +\frac{8}{12}, -\frac{6}{12}, -\frac{9}{12} = +\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$.

Die Division einer Gleichung dient, um das letzte Glied zu verkleinern und dadurch leichter die Wurzeln zu finden. Soll dies möglich sein, so müssen die Koeffizienten der Glieder durch die darunter stehende Potenz des Divisors sich ohne Rest dividiren lassen.

Die gegebene Gleichung z sei z. B.

$$x^3 + 6x^2 - 27x - 243 = 0.$$

Es soll diese durch 3 dividirt werden; man schreibe also

$$\begin{array}{cccc} x^3 + 24x^2 - 99x - 486 = 0 \\ 3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \quad 3^3 \end{array}$$

und dividire, so kommt $x^3 + 8x^2 - 11x - 18 = 0.$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind $+2, -9, -1$, also die Wurzeln der Gleichung $z = +2 \cdot 3, -9 \cdot 3, -1 \cdot 3 = +6, -27, -3$.

Bei Gleichungen, die sich nicht auf diese Art verkleinern lassen, kann durch folgende Aufgabe das letzte Glied verkleinert werden.

§. 67.
Aufgabe.

Eine gegebene Gleichung z in eine andere zu verwandeln, worin das letzte Glied kleiner ist, als in z.

Man suche eine Zahl, welche statt x in die Gleichung z gesetzt, einen Werth der Gleichung gibt, der kleiner als das letzte Glied in z ist. Hat man eine solche Zahl gefunden, so verbinde man dieselbe mit x, setze nun diese neue Größe überall in die Gleichung anstatt x und bilde daraus eine neue Gleichung, so wird in dieser das letzte Glied kleiner sein, als in z.

Es sei z. B. die Gleichung

$$z = x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

und q die Zahl, welche statt x gesetzt, einen Werth derselben gibt, der kleiner als das letzte Glied ist. Setzt man nun x + q überall anstatt x, so kommt

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & (x+q)^3 = x^3 + 3qx^2 + 3qx + q^3 \\ -ax^2 & = & -a(x+q)^2 = \quad -ax^2 - 2aqx - aq^2 \\ +bx & = & +b(x+q) = \qquad\qquad bx + bq, \\ -c & = & \qquad\qquad\qquad\quad -c \end{array}$$

$$\text{Also } Y = x^3 + (3q-a)x^2 + (3q-2aq+b)x + q^3 - aq^2 + bq - c = 0$$

Nun ist das letzte Glied c in z ein Produkt aus allen drei Werthen von x und das letzte Glied $q^3 - aq^2 + bq - c$ in Y ebenfalls ein Produkt aus allen drei Werthen von x. Es ist aber q so angenommen, daß es einen Werth der Gleichung gibt, der kleiner als c ist, folglich muß auch $q^3 - aq^2 + bq - c$ kleiner als c sein.

Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0.$$

Setzt man nun x = 1, so kommt

$$1 - 4 - 11 + 30 = +16.$$

Da nun 16 kleiner ist als 30, so setze man überall x + 1 anstatt x, so kommt

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ -4x^2 & = & \quad -4x^2 - 8x - 4 \\ -11x & = & \qquad\quad -11x - 11 \\ +30 & = & \qquad\qquad\quad +30 \end{array}$$

$$\text{also } Y = x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0.$$

Setzt man jetzt x = 4, so wird die Gleichung = 0, also ist 4 einer der Werthe und dividirt man mit x − 4 in

$x^3 - x^2 - 16x + 16$, so kommt die quadratische Gleichung $x^2 + 3x - 4$, woraus sich die anderen Werthe von x ergeben, nämlich $x = -4$ und $x = +1$. Die Werthe von z aber sind 1) $+5$, 2) $+2$ und 3) -3. Da nun Y dadurch entstand, daß 1 zu x in z gesetzt wurde, so muß z umgekehrt aus Y entstehen, wenn man von den Werthen in Y wieder 1 wegnimmt. Das zu x hinzugesetzte 1 war aber negativ, weil $x + 1$ anstatt x gesetzt wurde, also muß man von den Werthen in Y die Größe -1 wegnehmen. Dies gibt nun den einen Werth $= 4 - (-1) = 4 + 1 = 5$, den andern $= -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$, und den dritten $= 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$.

§. 68.

Zur Auffindung der möglichen Wurzeln einer Gleichung ist es sehr vortheilhaft, wenn man die Gränzen zu bestimmen sucht, zwischen welche die möglichen positiven und negativen fallen. Hat z. B. eine Gleichung lauter positive Wurzeln, so wird sich immer eine Zahl q angeben lassen, die größer ist, als jede der bejahten Wurzeln, die also, wenn man sie von ihnen abzieht, dieselben negativ macht. Die kleinste Größe von q, welche noch diese Eigenschaft hat, ist folglich die Gränze der bejahten Wurzeln. Eben so, wenn eine Gleichung lauter verneinte Wurzeln hat, so läßt sich wieder eine Zahl finden, welche zum negativen Werthe addirt, denselben positiv macht. Die kleinste Zahl, welche dies thut, ist die Gränze der negativen Wurzeln. Hieraus entspringt denn folgende

Aufgabe.

Die Gränzen zu finden, zwischen welche die mögliche Wurzeln einer Gleichung fallen.

Wenn in einer Gleichung, die lauter mögliche Wurzeln hat, lauter Abwechselungen vorkommen, so sind diese Wurzeln alle bejaht. Vermindert man nun die Wurzeln der Gleichung nach §. 64. so lange, bis man eine Gleichung bekommt, die lauter Folgen enthält, so ist die Zahl q, um welche man die Wurzeln vermindert hat, und welche alle Abwechselungen in Folgen verwandelt, die Gränze der bejaheten Wurzeln, denn wenn irgend eine von diesen noch größer als q wäre, so könnte die Subtraktion der Größe q daraus keine negative Zahl machen, also auch in der Gleichung nicht lauter Folgen bewirken.

Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0.$$

Ist nun q die Zahl, welche alle Werthe von x negativ macht, also die Gränze der positiven Wurzeln bildet, so setze man $x - q = y$, folglich $y + q = x$ und schreibe nun statt x überall $y + q$ in die Gleichung, um eine neue zu bilden. Es ist aber

$$\begin{aligned} x^3 &= (y+q)^3 = y^3 + 3y^2q + 3yq^2 + q^3, \\ -15x^2 &= -15(y+q)^2 = -15y^2 - 30yq - 15q^2, \\ 71x &= 71(y+q) = 71y + 71q, \\ -105 &= -105. \end{aligned}$$

Soll nun die Gleichung lauter Folgen bekommen, so muß

1) $3q > 15$,

also q wenigstens $= 6$ sein.

2) $3q^2 + 71 > 30q$,

also q wenigstens $= 7$.

3) $q^3 + 71q > 15q^2 + 105$,

also q wenigstens $= 7$, denn diese Zahl macht $q^3 + 71q$ und $15q^2 + 105$ einander gleich.

Eine größere Wurzel als 7 kann daher nicht in der Gleichung stecken, weil 7 schon, indem sie das letzte Glied $= 0$ macht, alle Abwechselungen in Folgen verwandelt. Zugleich muß 7 selbst eine Wurzel der Gleichung sein, eben weil dadurch das letzte Glied $= 0$ wird.

Enthält eine Gleichung lauter Folgen, so sind ihre Wurzeln alle negativ. Setzt man also zu denselben eine immer größere positive Zahl, bis die neue Gleichung lauter Abwechselungen bekommt, so ist die kleinste Zahl, welche dies bewirkt, die Gränze der negativen Wurzeln.

Es sei die Gleichung gegeben

$$x^3 + 19x^2 + 118x + 240 = 0.$$

Ist nun q die Zahl, welche alle negative Werthe in positive verwandelt, so ist $y = x + q$, also $y - q = x$. Man setze nun durchgängig in der gegebenen Gleichung $y - q$ anstatt x, so kommt

$$\begin{aligned} x^3 &= (y-q)^3 = y^3 - 3qy^2 + 3q^2y - q^3, \\ 19x^2 &= 19(y-q)^2 = 19y^2 - 38qy + 19q^2, \\ 118x &= 118(y-q) = 118y - 118q, \\ 240 &= 240. \end{aligned}$$

Soll nun aus der gegebenen Gleichung eine andere werden, die lauter Abwechselungen hat, so muß sie die Form $y^3 - Ay^2 + By - C = 0$ bekommen. Es muß also

1) $3q > 19$,

alſo q wenigſtens $= 7$ ſein.

2) $3q^2 + 118 > 38q$,

alſo q wenigſtens $= 8$.

3) $q^3 + 118q > 19q^2 + 240$,

alſo q wenigſtens $= 8$, denn für dieſen Werth iſt $q^3 + 118q = 19q^2 + 240$ und jeder kleinere Werth muß alſo $q^3 + 118q$ kleiner als $19q^2 + 240$ machen. Es iſt daher 8 die Gränze der negativen Wurzeln, weil es die kleinſte Zahl iſt, welche alle Folgen in Abwechſelungen verwandelt. Da zugleich die Zahl 8 das letzte Glied ſelbſt in 0 verwandelt, ſo iſt ſie auch eine Wurzel der Gleichung.

Enthält endlich eine Gleichung ſowohl poſitive als negative Wurzeln, ſo ſuche man ſowohl die Gränze der poſitiven, als die Gränze der negativen Wurzeln. Im erſten Falle ſetzt man $x = y + q$, im andern $x = y - q$.

Es ſei die Gleichung gegeben

$$x^3 + 6x^2 - 61x - 210 = 0.$$

Für $x = y + q$ kommt

$$\begin{aligned} x^3 &= (y+q)^3 = y^3 + 3qy^2 + 3q^2y + q^3, \\ 6x^2 &= 6(y+q)^2 = 6y^2 + 12qy + 6q^2, \\ -61x &= -61(y+q) = -61y - 61q, \\ -210 &= -210. \end{aligned}$$

Sollen nun in dieſer Gleichung lauter Folgen ſein, ſo muß

1) $3q^2 + 12q > 61$,

alſo q wenigſtens $= 3$ ſein.

2) $q^3 + 6q^2 > 61q + 210$,

alſo q wenigſtens $= 7$, denn dieſe Zahl macht $q^3 + 6q^2 = 61q + 210$, und iſt daher nicht nur die Gränze der poſitiven Wurzeln, ſondern ſelbſt eine.

Für $x = y - q$ kommt

$$\begin{aligned} x^3 &= (y-q)^3 = y^3 - 3qy^2 + 3q^2y - q^3, \\ 6x^2 &= 6(y-q)^2 = 6y^2 + 12qy + 6q^2, \\ -61x &= -61(y-q) = -61y + 61q, \\ -210 &= -210. \end{aligned}$$

Sollen nun in dieſer Gleichung lauter Abwechſelungen ſein, ſo muß 1) $3q > 6$,

alſo q wenigſtens $= 3$ ſein.

2) $3q^2 > 12q + 61$,

alſo q wenigſtens $= 7$.

3) $q^3 + 210 > 6q^2 + 61q$,

alſo q wenigſtens $= 10$ ſein, denn dieſe Zahl macht $q^3 + 210$

$= 6q^2 + 6q$. Sie ist also die Gränze der negativen Wurzeln und zugleich selbst eine, weil sie das letzte Glied $= 0$ macht. Es fallen daher die Wurzeln der Gleichung zwischen $+7$ und -10.

In folgenden Beispielen werden die Gränzen nicht gerade die Wurzeln selbst werden. Es seien also die Gleichungen gegeben: I. $x^3 - 4x^2 + 12x - 24 = 0$.

Diese enthält lauter Abwechselungen, also auch lauter positive Wurzeln. Setzt man $y + q = x$, so kommt

$$\begin{aligned} x^3 &= (y+q)^3 = y^3 + 3qy^2 + 3q^2y + q^3, \\ -4x^2 &= -4(y+q)^2 = -4y^2 - 8qy - 4q^2, \\ 12x &= 12(y+q) = 12y + 12q, \\ -24 &= -24. \end{aligned}$$

Sollen nun lauter Folgen werden, so muß

1) $3q > 4$,

also q wenigstens $= 2$ sein.

2) $3q^2 + 12 > 8q$,

also q wenigstens $= 1$.

3) $q^3 + 12q > 4q^2 + 24$,

also q wenigstens $= 3$. Die positiven Wurzeln können folglich nicht größer als 3 sein.

II. $x^3 + 3x^2 + 8x + 32 = 0$.

Die Gleichung hat lauter Folgen, also lauter negative Wurzeln. Um ihre Gränzen zu finden, setze man $y - q = x$, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= (y-q)^3 = y^3 - 3qy^2 + 3q^2y - q^3, \\ 3x^2 &= 3(y-q)^2 = 3y^2 - 6qy + 3q^2, \\ 8x &= 8(y-q) = 8y - 8q, \\ 32 &= 32. \end{aligned}$$

Sollen nun lauter Abwechselungen entstehen, so muß

1) $3q > 3$,

also q wenigstens $= 2$.

2) $3q^2 + 8 > 6q$,

also q wenigstens $= 1$.

3) $q^3 + 8q > 3q^2 + 32$,

also q wenigstens $= 4$ sein. Es gibt also keine größere negative Wurzel als 4.

III. $x^3 + 5x^2 - 24x - 72 = 0$.

Diese Gleichung hat positive und negative Wurzeln. Um die Grenze der erstern zu finden, setze man $x = y + q$, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= (y+q)^3 = y^3 + 3qy^2 + 3q^2y + q^3, \\ 5x^2 &= 5(y+q)^2 = 3y^2 + 10qy + 5q^2, \\ -24x &= -24(y+q) = -24y - 24q, \\ -72 &= -72. \end{aligned}$$

Sollen nun lauter Folgen entstehen, so muß

1) $3q^2 + 10q > 24$,

also q wenigstens $= 2$.

2) $q^3 + 5q^2 > 249 + 72$,

also q wenigstens $= 5$ sein, denn dann enthält die neue Gleichung $y^3 + 20y^2 + 101y + 58 = 0$ lauter Folgen und 5 ist die Gränze der positiven Wurzeln.

Um die Gränze der negativen Wurzeln zu finden, setze man $y - q = x$. Also ist

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3qy^2 + 3q^2y - q^3, \\ 5x^2 &= 5y^2 - 10qy + 5q^2, \\ -24x &= -24y + 24q, \\ -72 &= -72. \end{aligned}$$

Sollen nun lauter Abwechselungen entstehen, so muß

1) $3q > 5$,

also q wenigstens $= 2$.

2) $3q^2 > 10q + 24$,

also q wenigstens $= 5$.

3) $q^3 + 72 > 5q^2 + 24q$,

also q wenigstens $= 7$. Diese Zahl ist also die Gränze der negativen Wurzeln und die durch dieselbe entstehende neue Gleichung $y^3 - 16y^2 + 53y - 2 = 0$ enthält lauter Abwechselungen. Es fallen also überhaupt die Wurzeln der Gleichung zwischen $+5$ und -7.

§. 69.

Hat man höhere Gleichungen, worin mehr als eine unbekannte Größe vorkommt, so muß man erstlich so viel Gleichungen haben, als unbekannte Größen da sind, wenn diese bestimmt werden sollen; dann aber ist es allemal möglich, die eine unbekannte Größe zu eliminiren, d. h. eine neue Gleichung zu bilden, welche nur eine unbekannte Größe enthält. Hierher gehören folgende Aufgaben:

Erste Aufgabe.

Aus zwei höheren Gleichungen, deren jede zwei unbekannte Größen x und y enthält, eine dritte Gleichung abzuleiten, welche wenigstens um einen Grad niedriger ist, als die höchste der beiden gegebenen Gleichungen.

Es sind zwei Fälle möglich: 1) beide Gleichungen sind von einerlei Grade; 2) sie sind von verschiedenem Grade.

Im ersten Falle suche man in jeder Gleichung den Werth der höchsten Potenz einer und derselben unbekannten Größe und

ge diese Werthe einander gleich. Daraus ergibt sich denn die erlangte Gleichung.

Es seien die gegebenen Gleichungen:

I. $x^4 - yx^3 + ay^2x^2 - by^3x + cy^4 = 0.$

II. $x^4 + myx^3 - qy^2x^2 + px - y^4 = 0.$

Aus I. folgt

$$x^4 = yx^3 - ay^2x^2 + by^3x - cy^4,$$

und aus II.

$$x^4 = -myx^3 + qy^2x^2 - px + y^4.$$

Also

$$yx^3 - ay^2x^2 + by^3x - cy^4 = -myx^3 + qy^2x^2 - px + y^4,$$

und daraus ergibt sich

$$yx^3 + myx^3 - ay^2x^2 - qy^2x^2 + by^3x + px - cy^4 - y^4 = 0,$$

oder $(1+m)yx^3 - (a+q)y^2x^2 + (by^3+p)x - (c+1)y^4 = 0,$

oder $x^3 - \frac{(a+q)y}{1+m}x^2 + \frac{by^3+p}{(1+m)y}x - \frac{c+1}{1+m}y^3 = 0.$

Die neue Gleichung ist also vom dritten Grade. Wie viel Grade sie aber niedriger werden kann, das hängt von der Größe der Exponenten der unbekannten Größe in den nach dem höchsten folgenden Gliedern der gegebenen Gleichungen ab.

Im zweiten Falle multiplizire man die niedrigere Gleichung mit einer solchen Potenz der unbekannten Größe, daß sie mit der höhern Gleichung einerlei Grad erhält. Dann verfahre man nach dem ersten Falle.

Es seien die gegebenen Gleichungen:

I. $x^5 - ayx^3 + py^2x^2 - cy^3x + y^4 = 0.$

II. $x^4 + by^2x^2 - dy^3x + qy^4 = 0.$

Multiplizirt man II. mit x, so kommt

III. $x^5 + by^2x^3 - dy^3x^2 + qy^4x = 0.$

Nun ist in I.

$$x^5 = ayx^3 - py^2x^2 + cy^3x - y^4,$$

und in II.

$$x^5 = -by^2x^3 + dy^3x^2 - qy^4x.$$

Also

$$ayx^3 - py^2x^2 + cy^3x - y^4 = -by^2x^3 + dy^3x^2 - qy^4x.$$

Alles durch y dividirt, kommt

$$ax^3 - pyx^2 + cy^2x - y^3 = -byx^3 + dy^2x^2 - qy^3x.$$

Daraus folgt denn die vernichtete Gleichung:

$$ax^3 + byx^3 - py^2x^2 - dy^2x^2 + cy^2x + qy^3x - y^3 = 0,$$

oder $(a+by)x^3 - (p+d)y^2x^2 + (c+qy)y^2x - y^3 = 0,$

oder $x^3 - \frac{p+d}{a+by}y^2x^2 + \frac{c+qy}{a+by}y^2x - \frac{y^3}{a+by} = 0.$

§. 70.

Zweite Aufgabe.

Die vorige Aufgabe wird mit zur Auflösung der folgenden gebraucht:

Aus zwei rationalen höheren Gleichungen, deren jede zwei unbekannte Größen in beliebigen Potenzen enthält, die eine unbekannte Größe zu eliminiren und so eine neue Gleichung zu erhalten, die nur Eine unbekannte Größe enthält.

Es gibt folgende drei Fälle:

I. In beiden Gleichungen steht die unbekannte Größe nur in der ersten Potenz. Das Eliminiren der einen geschieht jetzt durch die Subtraktion der Gleichungen, wie es Th. I. S. 230. gelehrt worden.

II. Die unbekannte Größe kommt in der einen Gleichung in der ersten, in der andern in einer höhern Gleichung vor. In diesem Falle suche man den Werth derselben aus der Gleichung, wo sie in der ersten Potenz steht und substituire denselben in der zweiten Gleichung.

Es sei gegeben:

$$\text{I. } x^3 + yx^2 - py = 0.$$
$$\text{II. } x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 - q = 0.$$

Soll nun y eliminirt werden, so folgt aus I.

$$x^3 + y(x^2 - p) = 0,$$

also

$$y(x^2 - p) = -x^3,$$

und

$$y = -\frac{x^3}{x^2 - p}.$$

Schreibt man nun diesen Werth statt y in die zweite Gleichung, so kommt

$$\text{A) } y^4 = \frac{x^{12}}{x^8 - 4px^6 + 6p^2x^4 - 4p^3x^2 + p^4},$$

$$\text{B) } -xy^3 = \frac{x^{10}}{x^6 - 3px^4 + 3p^2x^2 - p^3},$$

$$\text{C) } x^2y^2 = \frac{x^8}{x^4 - 2px^2 + p^2},$$

$$\text{D) } -x^3y = \frac{x^6}{x^2 - p},$$

$$\text{E) } x^4 = x^4,$$

$$\text{F) } -q = -q.$$

Nun bringe man diese einzelnen Theile der neuen Gleichung unter einerlei Nenner, indem man die Gleichung B mit $x^2 - p$,

e Gleichung C mit $(x^2-p)^2 = x^4-2px^3+p^2$, die leichung D mit $(x^2-p)^3 = x^6-3px^4+3p^2x^2-p^3$ nd die Gleichung E und F mit $(x^2-p)^4 = x^8-4px^6-6p^2x^4-4p^3x^2+p^4$ multiplizirt. Dies gibt nun

$$y^4 = \frac{x^{12}}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4},$$

$$-xy^3 = \frac{x^{12}-px^{10}}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4},$$

$$x^2y^2 = \frac{x^{12}-2px^{10}+p^2x^8}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4},$$

$$-x^3y = \frac{x^{12}-3px^{10}+3p^2x^8-p^3x^6}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4},$$

$$x^4 = \frac{x^{12}-4px^{10}+6p^2x^8-4p^3x^6+p^4x^4}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4},$$

$$-q = \frac{-qx^8+4pqx^6-6p^2qx^4+4p^3qx^2-p^4q}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4}.$$

Addirt man jetzt die Zähler dieser gleichnamigen Brüche und setzt unter die Summe den gemeinschaftlichen Nenner, so kommt man

$$\frac{x^{12}-10px^{10}+(10p^2-q)x^8-(5p^3+4q)px^6+(p^3-6q)p^2x^4+4p^3qx^2-p^4q}{x^8-4px^6+6p^2x^4-4p^3x^2+p^4} = 0.$$

Folglich ist auch, wenn man mit dem Nenner auf beiden Seiten multiplizirt,

$$x^{12}-10px^{10}+(10p^2-q)x^8-(5p^3-4q)px^6+(p^3-6q)p^2x^4+4p^3qx^2-p^4q = 0,$$

und dividirt man nun mit dem Koeffizienten der höchsten Potenz durchgängig alle Glieder, so kommt

$$x^{12}-2px^{10}+\frac{10p^2-q}{5}x^8-\frac{5p^3-4q}{5}px^6+\frac{p^3-6q}{5}p^2x^4+\frac{4p^3q}{5}x^2-\frac{p^4q}{5} = 0.$$

III. Die zu eliminirende unbekannte Größe übersteigt in beiden Gleichungen die erste Potenz. Nennt man A und B die beiden Gleichungen, so mache man erst aus ihnen eine dritte C, die um einen oder einige Grade niedriger ist, als A oder B. Dann entwickele man wieder aus C und der niedrigsten unter den beiden gegebenen Gleichungen eine Gleichung D, die noch niedriger ist, und indem man dies Verfahren fortsetzt, muß man endlich auf eine Gleichung z kommen, in welcher die zu eliminirende Größe nur in der ersten Potenz vorhanden ist. Aus dieser suche man nun den Werth derselben und substituire

ihn in eine der beiden gegebenen Gleichungen, so erhält man eine Gleichung, in der nur eine unbekannte Größe vorkommt.

Es sei also

$$A = y^4 - y^3x + yx^2 - c = 0,$$

und $$B = y^3 + y^2x - yx^2 + d = 0,$$

also $$By = y^4 + y^3x - y^2x^2 + yd = 0.$$

Nun ist in A $y^4 = y^3x - yx^2 + c,$

und in By $y^4 = -y^3x + y^2x^2 - yd.$

Also $y^3x - yx^2 + c = -y^3x + y^2x^2 - yd,$

folglich $y^3x + y^3x - y^2x^2 - yx^2 + dy + c = 0,$

oder $2y^3x - y^2x^2 + y(d - x^2) + c = 0,$

also $$C = y^3 - \frac{y^2x}{2} + y\frac{d-x^2}{2x} + \frac{c}{2x} = 0.$$

Nun verbinde man C mit B, welche beide einerlei Grad haben, so folgt aus B,

$$y^3 = -y^2x + yx^2 - d,$$

und aus C, $$y^3 = y^2\frac{x}{2} - y\frac{d-x^2}{2x} - \frac{c}{2x}.$$

Folglich ist

$$y^2\frac{x}{2} - y\frac{d-x^2}{2x} - \frac{c}{2x} = -y^2x + yx^2 - d,$$

oder $$y^2\frac{x}{2} + y^2x - y\frac{d-x^2}{2x} - yx^2 - \frac{c}{2x} + d = 0,$$

oder $$y^2\left(\frac{x}{2} + x\right) - y\left(\frac{d-x^2}{2x} + x^2\right) + \frac{2dx-c}{2x} = 0,$$

oder $$y^2\frac{3x}{2} - y\frac{d-x^2+2x^3}{2x} + \frac{2dx-c}{2x} = 0,$$

also $$D = y^2 - y\frac{d-x^2+2x^3}{3x^2} + \frac{2dx-c}{3x^2} = 0.$$

Nun kombinire man D und C, indem man D auf den Grad von C erhebt. Es ist

$$C = y^3 - y^2\frac{x}{2} + y\frac{d-x^2}{2x} + \frac{c}{2x} = 0,$$

$$Dy = y^3 - y^2\frac{d-x^2+2x^3}{3x^2} + y\frac{2dx-c}{3x^2}.$$

Folglich aus C,

$$y^3 = y^2\frac{x}{2} - y\frac{d-x^2}{2x} - \frac{c}{2x},$$

aus D, $$y^3 = y^2\frac{d-x^2+2x^3}{3x^2} - y\frac{2dx-c}{3x^2}.$$

lso $y^2\frac{x}{2}-y\frac{d-x^2}{2x}-\frac{c}{2x}=y^2\frac{d-x^2+2x^2}{3x^2}-y\frac{2dx-c}{3x^2}$,

her $y^2\frac{x}{2}-y^2\frac{d-x^2+2x^2}{3x^2}-y\frac{d-x^2}{2x}+y\frac{2dx-c}{3x^2}-\frac{c}{2x}=0$,

er $y^2\left(\frac{x}{2}-\frac{d+x^2+2x^2}{3x^2}\right)+y\left(\frac{2dx-c}{3x^2}-\frac{d-x^2}{2x}\right)-\frac{c}{2x}=0$,

er $y^2\frac{3x^2-2d+2x^2-4x^2}{6x^2}+y\frac{4dx-2c-3dx+3x^2}{6x^2}-\frac{c}{2x}=0$,

er $y^2\frac{2x^2-x^2-2d}{6x^2}+y\frac{dx-2c+3x^2}{6x^2}-\frac{c}{2x}=0$,

glich

$=y^2+y\frac{dx-2c+3x^2}{2x^2-x^2-2d}-\frac{6cx^2}{4x^3-2x^4-4dx}=0.$

Endlich kombinire man E und D, die beide einerlei Grad ben. Aus D folgt

$$y^2=y\frac{d-x^2+2x^2}{3x^2}-\frac{2dx-c}{3x^2},$$

us E aber

$$y^2=-y\frac{dx-2c+3x^2}{2x^2-x^2-2d}+\frac{6cx^2}{4x^3-2x^4-4dx}.$$

olglich ist

$$y\frac{d-x^2+2x^2}{3x^2}-\frac{2dx-c}{3x^2}=-y\frac{dx-2c+3x^2}{2x^2-x^2-2d}+\frac{6cx^2}{4x^3-2x^4-4dx}.$$

lso

$$y\left(\frac{d-x^2+2x^2}{3x^2}+\frac{dx-2c+3x^2}{2x^2-x^2-2d}\right)=\frac{2dx-c}{3x^2}+\frac{6cx^2}{4x^3-2x^4-4dx}.$$

Bringt man links und rechts unter einerlei Nenner, um addiren zu können, so kommt

$$y\left(\frac{-2d^2+4dx^2-5dx^3-2x^4+5x^5-2x^6+3dx^3-6cx^2+9x^5}{6x^4-3x^5-6dx^2}\right)$$
$$=\frac{4dcx-8dx^2-4cx^3+8dx^4+2cx^4-4dx^5+18cx^4}{12x^5-6x^6-12dx^3},$$

oder $y\left(\frac{-2d^2+(4d-6c)x^2-2dx^3-2x^4+14x^5-2x^6}{6x^4-3x^5-6dx^2}\right)$
$$=\frac{4dcx-8dx^2-4cx^3+8dx^4+20cx^4-4dx^5}{2x(6x^4-3x^5-6dx^2)},$$

oder $y\left(\frac{-2d^2+(4d-6c)x^2-2dx^3-2x^4+14x^5-2x^6}{6x^4-3x^5-6dx^2}\right)$
$$=\frac{4dcx-8dx^2-4cx^3+(8d+20c)x^4-4dx^5}{2x(6x^4-3x^5-6dx^2)}.$$

Also $y = \dfrac{\dfrac{4dcx - 8dx^2 - 4cx^3 + (8d + 2cc)x^2 - 4dx^3}{2x(6x^4 - 3x^5 - 6dx^2)}}{\dfrac{-2d^2 + (4d - 6c)x^2 - 2dx^3 - 2x^4 + 14x^5 - 2x^6}{6x^4 - 3x^5 - 6dx^2}}$

oder $y = \left(\dfrac{4dcx - 8dx^2 - 4cx^3 + (8d + 2cc)x^2 - 4dx^3}{2x(6x^4 - 3x^5 - 6dx^2)}\right)$

$\times\left(\dfrac{6x^4 - 3x^5 - 6dx^2}{-2d^2 + (4d - 6c)x^2 - 2dx^3 - 2x^4 + 14x^5 - 2x^6}\right)$

$= \dfrac{4dcx - 8dx^2 - 4cx^3 + (8d + 2cc)x^2 - 4dx^3}{2x(-2d^2 + (4d - 6c)x^2 - 2dx^3 - 2x^4 + 14x^5 - 2x^6)}$

$= \dfrac{4dcx - 8dx^2 - 4cx^3 + (8d + 2cc)x^2 - 4dx^3}{-4d^2x + (8d - 12c)x^3 - 4dx^4 - 4x^5 + 28x^6 - 4x^7}$

Setzt man nun diesen Werth für y in die Gleichung A oder B, so erhält man eine Gleichung, die bloß die unbekannte Größe x enthält. Zu dem Ende muß man, wenn man die Gleichung B wählt, den Werth von y erstlich auf die dritte Potenz erheben, so ergibt sich y^3, dann auf die zweite und diese mit x multipliziren, so erhält man y^2x, endlich den Werth selbst mit x^2 multipliziren, so ergibt sich yx^2. Um davon eine kurze Übersicht zu geben, so sei der Werth von $y = \frac{z}{V}$, so ist

$$y^3 = \frac{z^3}{V^3},\quad y^2x = \frac{z^2x}{V^2},\quad -yx^2 = \frac{-zx^2}{V}.$$

Folglich ist $B = \frac{z^3}{V^3} + \frac{z^2x}{V^2} - \frac{zx^2}{V} + d = 0.$

Nun bringe man alle Größen unter einerlei Nenner, so kommt $\frac{z^3}{V^3} + \frac{z^2xV}{V^3} - \frac{zx^2V^2}{V^3} + \frac{dV^3}{V^3} = 0,$

und da nun alle Brüche einerlei Nenner haben, so geben die Zähler selbst eine Gleichung $= 0$, also ist

$$B = z^3 + z^2Vx - zV^2x^2 + dV^3 = 0,$$

und aus dieser Gleichung läßt sich nun x entwickeln, und daraus y bestimmen.

§. 71.

Zusatz.

Hat man drei Gleichungen A, B, C und drei unbekannte Größen x, y, z, so läßt sich ebenfalls daraus eine Gleichung finden, die nur eine unbekannte Größe enthält. Aus A und B mache man nämlich eine Gleichung D, die bloß x und y, aber nicht mehr z enthält. Dann mache man aus B und C auch eine E, in der ebenfalls nur x und y vorkommen. Kom-

nirt man nun wieder D und E zusammen, so wird sich eine leichung F ergeben, die entweder nur x oder nur y enthält. ann kann man den Werth z. B. von x finden, und diesen D, oder E substituiren, wodurch sich eine Gleichung ergeben ird, die bloß y enthält. Berechnet man nun auch den Werth n y, und setzt man in A oder B die Werthe von x und y tt x und y, so wird man eine Gleichung erhalten, die bloß ch z und bekannte Größen enthält. Es wird sich also z den lassen und somit werden sich alle drei Werthe ergeben. eraus erhellet denn auch im Allgemeinen, daß, wenn eben viele Gleichungen als unbekannte Größen gegeben sind, sich mer eine Gleichung bilden lasse, die nur Eine unbekannte röße enthält, woraus sich denn durch Substituirung alle übrige bekannte gefunden werden.

Von der Auflösung der höheren Gleichungen.

§. 72.

Man kennt noch keine allgemeine Methode, die höheren leichungen auf geradem Wege aufzulösen. Man hat zwar von ardan, Bombelli und Euler allgemeine Auflösungen r die kubischen und biquadratischen Gleichungen, aber sie sind aktisch nicht sehr brauchbar. Daher ist man lieber bei der direkten Auflösung stehen geblieben, welche auf den bisher orgetragenen Sätzen beruhet.

Ist also eine höhere Gleichung gegeben, so untersuche man st nach §. 60., ob sie positive, oder negative Wurzeln, oder de zusammen enthalte.

Dann zerfälle man das letzte Glied in seine einfachen und sammengesetzten Faktoren und setze jeden Faktor positiv oder gativ, oder auf beiderlei Weise in die Gleichung, um zu ntersuchen, ob die Gleichung dadurch $= 0$ werde. Jeder aktor, der dies thut, ist eine Wurzel der Gleichung.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^3 - 9x^2 - 12x + 160.$$

Diese hat eine Folge und zwei Abwechselungen, folglich hat sie wei positive und eine negative Wurzel.

Das letzte Glied 160 enthält die Faktoren: 1, 2, 4, 8, 5, 10, 16, 20, 32, 40, 80, 160.

Probirt man nun nach einander diese Faktoren, ob einer avon die Gleichung $= 0$ mache, so findet sich, daß weder 1

noch 2, man mag sie nun positiv oder negativ setzen, thue; auch der Faktor +4 gibt kein genügendes Resultat, man aber denselben = −4, so wird die Gleichung in verwandelt: $-64-144+48+160=0$.
Es ist also −4 eine Wurzel der Gleichung. Dividirt nun mit $x+4$ in die gegebene Gleichung

$$x+4 \mid x^3-9x^2-12x+160 \mid x^2-13x+40$$
$$x^2+4x^2$$
$$-13x^2-12x$$
$$-13x^2-52x$$
$$+40x+160$$
$$40x+160$$
$$0 \quad 0$$

so hat man die quadratische Gleichung $x^2-13x+40$ halten, aus der sich nach früheren Regeln die beiden andern Wurzeln finden lassen.

Sobald die Wurzeln der Gleichung ganze Zahlen sind, kann man sie durch die angegebene Methode finden.

§. 73.
Zusatz.

Ist das letzte Glied der Gleichung groß, oder enthält es viele Faktoren, so kann man die Arbeit des Aufsuchens der Wurzeln dadurch abkürzen, daß man nach §. 68. die Grenzen der möglichen Wurzeln sucht, oder nach §. 66. und §. 67. die gegebene Gleichung in eine andere verwandelt, deren letztes Glied kleiner ist, oder nach §. 65. aus der gegebenen Gleichung eine andere bildet, in der das zweite Glied fehlt, weil dann die Summe der Wurzeln = 0 wird. Hat man nur erst eine Wurzel gefunden, so bildet man daraus eine Wurzelgleichung, dividirt die gegebene Gleichung durch dieselbe und erhält so eine neue, die um einen Grad niedriger ist. Mit dieser verfährt man wieder, wie mit der ersten, und gelangt so zuletzt auf quadratische Gleichungen, die nach gegebenen Regeln sich lösen lassen.

Es sei die Gleichung gegeben:

$$x^4+6x^3-117x^2-378x+1944=0.$$

Die Gleichung hat zwei Folgen und zwei Abwechselungen, enthält also zwei positive und zwei negative Wurzeln.

Das letzte Glied ist groß, man suche also dasselbe zu verkleinern. Da alle Koeffizienten sich durch 3 heben lassen, versuche man nach §. 66. die Gleichung zu dividiren, indem man

an der Linken zur Rechten die Potenzen von 3 als Divisoren
ter die Glieder schreibt,

$$x^4 + 6x^3 - 117x^2 - 378x + 1944 = 0.$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81.$$

Daraus ergibt sich eine neue Gleichung

$$Y = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Man suche nun die Wurzeln von Y und nehme dieselben
reimal, so hat man die Wurzeln der gegebenen Gleichung.
Das letzte Glied 24 enthält die Faktoren: 1, 2, 3, 4, 6,
, 12, 24.

Probirt man mit $+1$, so wird die Gleichung

$$1 + 2 - 13 - 14 + 24$$

irklich $= 0$, es ist also $+1$ eine Wurzel von Y, und folg-
ch $+3$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Probirt man mit -1 und $+2$, so wird Y nicht $= 0$,
er -2 gibt die Gleichung

$$16 - 16 - 52 + 28 + 24$$

ieder $= 0$, also ist -2 eine Wurzel von Y, folglich -6
ine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Dividirt man jetzt mit dem Produkte $(x-1).(x+2)$
$= x^2 + x - 2$ in $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$, so er-
hält man zum Quotienten $x^2 + x - 12$, und löset man diese
quadratische Gleichung nach der bekannten Regel auf, so erhält
man für Y die Wurzeln $+3$ und -4. Die noch fehlenden
Wurzeln der gegebenen Gleichung sind also $+9$ und -12.

Es sei eine gegebene Gleichung

$$x = x^5 - 15x^4 - 5x^3 + 735x^2 - 716x - 10080 = 0.$$

Die Gleichung enthält drei Abwechselungen und zwei Folgen,
hat also drei positive und zwei negative Wurzeln. Das letzte
Glied ist groß, läßt sich aber nicht dadurch verkleinern, daß
man die Glieder durch die Potenzen irgend einer Zahl dividiren
kann. Man kann also §. 67. anwenden, um das letzte Glied
zu verkleinern. Setzt man z. B. $x = 6$, so ist $x^5 - 15x^4$
$- 5x^3 + 735x^2 - 716x - 10080 = 7776 - 19440 - 1080$
$+ 26460 - 4296 - 10080 = -660$. Man schreibe also
in der gegebenen Gleichung $x + 6$ anstatt x, so kommt

$x^5 =$	$(x+6)^5 =$	$x^5 + 30x^4 + 360x^3 + 2160x^2 + 6480x + 7776$
$-15x^4 =$	$-15(x+6)^4 =$	$-15x^4 - 360x^3 - 3240x^2 - 12960x - 19440$
$-5x^3 =$	$-5(x+6)^3 =$	$-5x^3 - 90x^2 - 540x + 1080$
$+735x^2 =$	$735(x+6)^2 =$	$735x^2 + 8820x + 26460$
$-716x =$	$-716(x+6) =$	$-716x - 4296$
$-10080 =$		-10080
Wo $Y =$		$x^5 + 15x^4 - 5x^3 - 435x^2 + 1084x - 660 = 0$

Die Faktoren von 660 sind: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 20, 22, 30, 33, 40, 44, 55, 66, 110, 120, 330, 666. Da die Zahl derselben immer noch sehr groß ist und jeder sowohl positiv als negativ probirt werden muß, so suche man nach §. 68. die Gränzen der Wurzeln.

Um die Gränzen der positiven zu finden, setze man $y+q = x$, so kommt

$$\begin{array}{rcl}
+x^5 &=& (y+q)^5 = y^5+5qy^4+10q^2y^3+10q^3y^2+5q^4y+ \\
+15x^4 &=& 15(y+q)^4 = 15y^4+60qy^3+90q^2y^2+60q^3y+ \\
-5x^3 &=& -5(y+q)^3 = -5y^3-15qy^2-15q^2y- \\
-435x^2 &=& -435(y+q)^2 = -435y^2-870qy- \\
+1084x &=& 1084(y+q) = 1084y+ \\
-660 &=& -
\end{array}$$

Soll nun die neue Gleichung lauter Folgen enthalten, so muß man q so annehmen, daß im dritten Gliede $10q^3+90q^2 > 15q+435$ ist; dies geschieht, wenn man $q = 3$ setzt. Es muß aber auch $5q^4+60q^3+1084 > 15q^2+870q$ sein und dies geschieht auch, wenn $q = 3$ ist. Endlich muß auch $q^5+15q^4+1084q > 5q^3+435q^2+660$, welches ebenfalls geschieht, wenn man $q = 4$ setzt. Daraus folgt denn, daß die positiven Wurzeln kleiner als 4 sein müssen.

Um die Gränzen der negativen zu finden, setze man $x = y-q$, so erhält man

$$\begin{array}{rcl}
+x^5 &=& (y-q)^5 = y^5-5qy^4+10q^2y^3-10q^3y^2+5q^4y- \\
+15x^4 &=& 15(y-q)^4 = 15y^4-60qy^3+90q^2y^2-60q^3y+ \\
-5x^3 &=& -5(y-q)^3 = -5y^3+15qy^2-15q^2y+ \\
-435x^2 &=& -435(y-q)^2 = -435y^2+870qy- \\
+1084x &=& 1084(y-q) = +1084y- \\
-660 &=& -
\end{array}$$

Soll nun diese neue Gleichung lauter Abwechselungen enthalten, so muß

1) $5q > 15$,
also q wenigstens $= 4$.

2) $10q^2 > 60q+5$,
also q wenigstens $= 7$.

3) $10q^3+435 > 90q^2+15q$,
also q wenigstens $= 9$.

4) $5q^4+870q+1084 > 60q^3+15q^2$,
also q wenigstens $= 11$.

5) $q^5+435q^2+1084q+660 > 15q^4+5q^3$,
also q wenigstens $= 12$.

Daraus folgt denn, daß die negativen Wurzeln kleiner als 12 sein müssen. Es fallen also die Wurzeln der Gleichung Y zwischen $+4$ und -12. Sie sind also entweder $+3$, $+2$

+ 1 oder — 1, — 2, — 3, — 5, — 6, — 10, — 11. Die drei ersten positiven Wurzeln machen alle die Gleichung = 0, von den negativen thun es — 10 und — 11; folglich sind die fünf Wurzeln der Gleichung Y = 3, 2, 1, — 10, — 11.

Sind nun dieses die Wurzeln der Gleichung Y, so findet man daraus die der gegebenen, wenn man zu jeder dieser Wurzeln noch 6 addirt, weil Y eben dadurch entstand, daß die Wurzeln der ursprünglichen Gleichung um 6 vermindert worden waren. Es sind daher die gesuchten Wurzeln x = 9, x = 8, x = 7, x = — 4, x = — 5.

§. 74.

Aufgaben zu den vorstehenden Regeln.

Unter den Exempeln im ersten Theile kamen einige vor, welche auf kubische Gleichungen führten; diese wollen wir zuförderst auflösen.

I. Das Exempel S. 321. führte auf die kubische Gleichung

$$-guv^2(b+s) = y^3(u-v) - y^2(u-v)vb - yguv.$$

Geordnet heißt dieselbe

$$y^3(u-v) - y^2(u-v)vb - yguv + guv^2(b+s) = 0,$$

und die höchste Potenz von ihrem Koeffizienten befreiet, kommt

$$y^3 - y^2vb - y\frac{guv}{u-v} + \frac{guv^2(b+s)}{u-v} = 0.$$

Die Zahlen des Exempels müssen zuvörderst auf einerlei Einheit reduzirt werden. Kostet der Scheffel beim Einkaufe 1 thlr., so kostet der Wispel 24 thlr., also b = 24. Ist der Verkaufspreis des Scheffels beim ersten Theile 40 mal kleiner, als dieser Theil Wispel enthält, so ist der Verkaufspreis des Wispels $\frac{40}{24} = \frac{5}{3}$ mal kleiner, als die Anzahl der Wispel, und eben so der Verkaufspreis des Restes $\frac{60}{24} = \frac{5}{2}$ mal kleiner. Es ist also $u = \frac{5}{3}$ und $v = \frac{5}{2}$. Endlich muß der mögliche Gewinn nicht 6000 thlr., sondern 6400 thlr. sein. Jetzt wird sich die Gleichung so in Zahlen bestimmen lassen:

$$y^3 - y^2 \cdot \tfrac{5}{2} \cdot 24 - y\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot 6400}{\frac{5}{3}-\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{5}{2})^2\cdot\frac{5}{3}\cdot 6400(24+9\frac{3}{5})}{\frac{5}{3}-\frac{5}{2}} = 0,$$

$$\text{oder } y^3 - 60y^2 - y\frac{\frac{25}{6}\cdot 6400}{-\frac{5}{6}} + \frac{\frac{25}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot 6400\cdot\frac{168}{5}}{-\frac{5}{6}} = 0,$$

$$\text{oder } y^3 - 60y^2 + \tfrac{25}{6}\cdot 6400\cdot\tfrac{6}{5}y - \tfrac{25}{4}\cdot\tfrac{5}{3}\cdot 6400\cdot\tfrac{168}{5}\cdot\tfrac{6}{5} = 0,$$

$$\text{oder } y^3 - 60y^2 + 32000y - 2688000 = 0.$$

Dieſe Gleichung läßt ſich durch die Potenzen von 20 dividiren.

Alſo $y^3 - 60y^2 + 32000y - 2688000 = 0,$
$\quad 1 \quad 20 \quad 400 \quad 8000$

Dies gibt $y^3 - 3y^2 + 80y - 336 = 0.$

Die Gleichung hat lauter Abwechſelungen, enthält alſo drei poſitive Wurzeln, wenn ſie nämlich lauter mögliche Wurzeln hat. Die Faktoren des letzten Gliedes ſind 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 48, 56, 84, 112, 168, 336. Sucht man, da die Zahl der Faktoren groß iſt, die Gränzen der poſitiven Wurzeln, ſo ſetze man $y = z + q$, ſo iſt

$$\begin{aligned} y^3 &= z^3 + 3qz^2 + 3q^2z + q^3, \\ -3y^2 &= -3z^2 - 6qz - 3q^2, \\ 80y &= 80z + 80q, \\ -336 &= -336. \end{aligned}$$

Soll alſo die Gleichung lauter Folgen bekommen, ſo muß

1) $3q > -3,$

alſo q wenigſtens $= 2.$

2) $3q^2 + 80 > 6q,$

alſo q wenigſtens $= 1.$

3) $q^3 + 80q > 3q^2 + 336,$

alſo q wenigſtens $= 4$, welche Zahl zugleich das letzte Glied aufhebt, alſo eine Wurzel der Gleichung iſt. Es iſt daher in der verkleinerten Gleichung $y = 4$. Dividirt man nun mit $y - 4$ in dieſe Gleichung, ſo erhält man eine quadratiſche und daraus die anderen beiden Wurzeln. Es iſt aber der Quotient $= y^2 + y + 84 = 0$ und da dieſe Gleichung lauter Folgen hat, während die kubiſche lauter Abwechſelungen hatte, ſo iſt dies ein Zeichen, daß die beiden anderen Wurzeln unmöglich ſind. In der That ſind dieſelben

$$1) = \frac{-1 + \sqrt{-335}}{2}$$

und

$$2) = \frac{-1 - \sqrt{-335}}{2}.$$

Die Gleichung hat daher nur eine mögliche Wurzel, nämlich 4. Da dieſe aber 20 mal kleiner iſt, als die Wurzel der urſprünglichen Gleichung, ſo iſt letztere $= 80$. Es ſind alſo zuerſt 80 Wſpl. verkauft worden. Aus dieſem Werthe läßt ſich nun x beſtimmen, nämlich

$$x = \frac{vg}{y - vb} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 6400}{80 - \frac{5}{2} \cdot 24} = \frac{16000}{80 - 60} = \frac{16000}{20} = 800 \text{ Wſpl.}$$

Es wurden alſo 800 Wſpl. verkauft und der Scheffel mit 1 thlr. bezahlt, daher die Ausgabe $= 19200$ thlr. Zuerſt wur-

den 80 Wspl., der Scheffel zu $\frac{80}{40} = 2$ thlr. und dann 720 Wspl., der Scheffel zu $\frac{80}{60} = 1\frac{1}{3}$ thlr. verkauft. Diese Einnahme beträgt zusammen 26880 thlr., der Gewinn also 7680 thlr., und dieser ist $9\frac{3}{5}$ mal größer als 800. Die mögliche Einnahme wäre 25600, der Gewinn also 6400 thlr. gewesen.

II. Das Exempel Th. I. S. 402. ist oben S. 59. und 60. erläutert und gibt die kubische Gleichung:

$$y^3 + y^2\frac{m(p^2+qf)+pqd(m-2q)}{q(q-m)} + y\frac{p[qd(qpd-mf)-2pmf]}{q(q-m)} = -\frac{p^2mf^2}{q(q-m)},$$

Nach den Zahlen des Exempels ist $m = 12$, $q = 3$, $d = 40$, $p = 120$, $f = 4950$. Rechnet man die Koeffizienten der Glieder aus, so erhält man die Gleichung:

$$y^3 - 16200y^2 + 87360000y - 15681600000 = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich durch die Potenzen von 200 dividiren, also

$$y^3 - 16200y^2 + 87360000y - 15681600000 = 0,$$

$$1 \quad 200 \quad 40000 \quad 8000000$$

kommt $y^3 - 81y^2 + 2184y - 19602 = 0.$

Da das letzte Glied noch zu groß ist, so setze man für y einen Werth, der dasselbe kleiner macht. Es sei z. B. $y = 20$, so ergibt sich daraus die Gleichung

$$8000 - 32400 + 43680 - 19602 = -322.$$

Schreibt man nun $z + 20$ anstatt y, so kommt

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & z^3 + 60z^2 + 1200z + 8000 \\ -81y^2 & = & -81z^2 - 3240z - 32400 \\ +2184y & = & 2184z + 43680 \\ -19602 & = & -19602 \\ \hline \text{also} & & z^3 - 21z^2 + 144z - 322 = 0. \end{array}$$

Die Faktoren des letzten Gliedes sind 1, 2, 7, 14, 23, 46, 161, 322 und zwar alle positiv, weil die Gleichung lauter Abwechselungen hat. Probirt man nun mit 7, so wird die Gleichung $= 0$, also ist 7 eine Wurzel derselben, folglich $y = 7 + 20 = 27$, und dieses mit 200 multiplizirt, gibt 5400 als den gesuchten möglichen Gewinn des Exempels.

Dividirt man mit $z - 7$ in $z^3 - 21z^2 + 144z - 322 = 0$, so erhält man die quadratische Gleichung $z^2 - 14z + 46$, aus welcher die beiden anderen Wurzeln sich ergeben. Es ist nämlich

1) $z = \frac{14+\sqrt{(14^2-4.46)}}{2} = \frac{14+\sqrt{12}}{2} = \frac{14+2\sqrt{3}}{2}$
$= 7+\sqrt{3}$.

2) $z = \frac{14-\sqrt{12}}{2} = \frac{14-2\sqrt{3}}{2} = 7-\sqrt{3}$.

Diese beiden Werthe sind irrational und passen nur näherungsweise zum Exempel. Es ist

$7+\sqrt{3} = 8{,}7320508\ldots$
$7-\sqrt{3} = 5{,}2679491\ldots$

Also $y = z+20 =$ 1) 28,7320508 und 2) 25,2679491. Diese Zahlen 200 mal genommen, kommen die beiden andern Werthe des möglichen Gewinnes 1) = 5746,41016 und 2) = 5053,58982, beide nur näherungsweise.

Der mögliche Gewinn im Exempel ist also entweder 5400 thlr., oder 5746,41016 thlr., oder 5053,58982 thlr.

Daraus läßt sich nun wieder x bestimmen vermittelst der Gleichungen S. 403.

Nimmt man die erste Gleichung

$$pmx^2+mxy = -py,$$

so hat man $x^2 - x\frac{y}{p} = -\frac{y}{m}$.

Setzt man in dieser $y = 5400$, so ergibt sich

$$x^2 - x\tfrac{5400}{120} = -\tfrac{5400}{12},$$

oder $x^2 - 45x = -450$,

also $x = \frac{45\mp\sqrt{(45^2-4.450)}}{2}$,

folglich 1) $x = \frac{45+15}{2} = 30$ thlr.

2) $x = \frac{45-15}{2} = 15$ thlr.

Setzt man $y = 5746{,}41016$, so kommt die Gleichung

$$x^2 - x\tfrac{5746{,}41016}{120} = -\tfrac{5746{,}41016}{12},$$

oder $x^2 - x.47{,}886751 = -478{,}86751$.

Daraus ergeben sich die Näherungswerthe

1) $x = 33{,}6602$ und 2) $x = 14{,}2265$.

Setzt man $y = 5053{,}58982$, so kommt die Gleichung

$$x^2 - x\tfrac{5053{,}58982}{120} = -\tfrac{5053{,}58982}{12},$$

oder $x^2 - x.42{,}113248 = -421{,}13248$.

Die Rechnung gibt die Näherungswerthe

1) $x = 25{,}7734$ und 2) $x = 16{,}3398$.

Nimmt man die zweite Gleichung

$$pf = -x^2pm + x(pqd + my - qy),$$

so erhält man daraus

$$x^2 - x\frac{pqd + y(m-q)}{pm} = -\frac{f}{m}.$$

Setzt man nun $y = 5400$, so kommt

$$x^2 - 43{,}75x = -412{,}5.$$

Daraus erhält man

$$x = \frac{43{,}75 \mp \sqrt{(43{,}75^2 - 4 \cdot 412{,}5)}}{2}.$$

Die Rechnung gibt

1) $x = 30$ und 2) $x = 13\frac{3}{4}$.

Setzt man $y = 5746{,}41016$, so erhält man

$$x^2 - x \cdot 45{,}915 = -412{,}5.$$

Daraus ergibt sich

1) $x = 33{,}6602$ und 2) $x = 12{,}255\ldots$

Setzt man endlich $y = 5053{,}58982$, so kommt

$$x^2 - x \cdot 41{,}583547 = -412{,}5.$$

Also 1) $x = 25{,}24124$ und 2) $x = 16{,}34229$.

Es haben sich also zwölf mögliche Werthe für x ergeben, die aber nicht alle ganz genau zur Aufgabe passen.

Setzt man die ersten sechs Werthe, die sich aus der ersten quadratischen Gleichung für x und den drei Werthen für y ergeben, nach der Reihe = A, B, C, D, E, F, und die folgenden sechs Werthe aus der andern Gleichung für x und den drei Werthen für y = a, b, c, d, e, f, so ergibt sich:

Der Werthe A und a sind ganz einerlei; die Aufgabe wird dadurch vollkommen aufgelöst.

Der Werth B gibt den möglichen Gewinn richtig, aber nicht den wirklichen; b dagegen den wirklichen, aber nicht den möglichen.

Die Werthe C und c sind wieder einerlei, sie lösen die Aufgabe vollkommen, aber nur näherungsweise.

Die Werthe D und d lösen sie unvollkommen, D gibt den möglichen, d den wirklichen Gewinn näherungsweise richtig.

Derselbe Fall ist es mit E und e; es gibt E den möglichen, e den wirklichen Gewinn näherungsweise richtig.

Dagegen lösen F und f die Aufgabe näherungsweise ziemlich richtig, bloß in den Dezimalstellen kommen Verschiedenheiten.

Die Aufgabe hat daher nur eine ganz genaue Auflösung und zwei, welche näherungsweise richtig sind, doch F und f weniger als C und c.

III. Das Exempel oben S. 117. gibt die kubische Gleichung

$$y^3 - uby^2 - y\frac{u^2g}{q} + u(g-f) + u^2b(g-f) = 0.$$

Die Koeffizienten sind zum Theil fehlerhaft bestimmt, es muß heißen $b = 20$, $u = 10$, $q = 75$, $f = 5000$, $g = 10000$. Daraus ergibt sich in Zahlen die Gleichung

$$y^3 - 200y^2 - \frac{190000}{3}y + 10000000 = 0.$$

Dividirt man die Gleichung durch 100,

$$y^3 - 200y^2 - \frac{190000}{3}y + 10000000 = 0,$$
$$1 \quad 100 \quad 10000 \quad 1000000$$

so kommt $y^3 - 2y^2 - \frac{19}{3}y + 10 = 0.$

Die Faktoren des letzten Gliedes sind in ganzen Zahlen 1, 2, 5, 10; keiner derselben löset die Gleichung. Die Ursache liegt darin, daß ein Glied der Gleichung einen Bruch enthält. Um diesen wegzuschaffen, wende man die Aufgabe §. 66. an und multiplizire die Gleichung mit einer Zahl, in deren Potenzen der Nenner des vorhandenen Bruchs aufgeht. Dies ist die Zahl 3 und die Multiplikation geschieht so:

$$y^3 - 2y^2 - \frac{19}{3}y + 10 = 0.$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

Es kommt. $y^3 - 6y^2 - 57y + 270 = 0.$

Da das letzte Glied immer noch groß ist, so suche man eine Zahl, welche, für y gesetzt, einen Werth der Gleichung gibt, der kleiner als das letzte Glied kommt. Dies thut die Zahl 8; denn alsdann ist $8^3 - 6.8^2 - 57.8 + 270 = 58$. Setzt man daher $z + 8 = y$, so kommt

$$\begin{array}{rcl} y^3 & = & z^3 + 24z^2 + 192z + 512 \\ -6y^2 & = & -6z^2 - 96z - 384 \\ -57y & = & -57z - 456 \\ +270 & = & +270 \end{array}$$

Also $\qquad z^3 + 18z^2 + 39z - 58 = 0.$

Von 58 sind die Faktoren 1, 2, 29, 58. Probirt man den Faktor 1, so wird die Gleichung $= 0$. Es ist also $z = 1$, folglich $y = z + 8 = 9$. Da nun aber dieser Werth dreimal zu groß ist, so ist die Wurzel der Gleichung $y^3 - 2y^2 - \frac{19}{3}y + 10$ dreimal kleiner, also $= 3$.

Um nun die anderen Wurzeln zu finden, dividire man mit $y - 3$ in die Gleichung $y^3 - 2y^2 - \frac{19}{3}y + 10$. Der Quotient ist $y^2 + y - \frac{10}{3}$. Daraus findet man

$$y = \frac{-1 \mp \sqrt{(1 + \frac{40}{3})}}{2}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{\frac{43}{3}}}{2}$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{\frac{129}{9}}}{2}$$

$$= \frac{-1 \mp \frac{\sqrt{129}}{3}}{2}$$

$$= \frac{-3 \mp \sqrt{129}}{6}$$

$$= \frac{-3 \mp 11,35781669}{6}$$

also 1) $= y = \frac{-3 + 11,35781669}{6}$

$$= \frac{8,35781669}{6}$$

$$= 1,39296944.$$

2) $= \frac{-3 - 11,35781669}{6}$

$$= \frac{-14,35781669}{6}$$

$$= -2,39296944.$$

Endlich, da die ursprüngliche Gleichung durch 100 dividirt worden war, so multiplizire man die gefundenen drei Werthe mit 100, so erhält man

1) $y = 300,$
2) $y = 139,296944 \ldots\ldots$
3) $y = -239,296944 \ldots\ldots$

Die beiden letzten sind bloß Näherungswerthe.

Aus diesen Werthen findet man nun x. Es war in der ersten Gleichung S. 117.,

$$x = \frac{ug}{y - ub}.$$

Die zweite Gleichung aber war

$$qy^2 - uxy = uq(g - f),$$

oder $uxy - qy^2 = -uq(g - f),$

also $uxy = qy^2 - uq(g - f),$

folglich $x = \frac{qy}{u} - \frac{q(g-f)}{y}.$

Jeder Werth von y gibt in beiden Gleichungen für x einerlei Werth. Setzt man nämlich $y = 300$, so kommt in beiden Gleichungen $x = 1000$. Setzt man

$y = 139{,}296944\ldots\ldots$
so kommt $x = -1647{,}3634\ldots\ldots$
und ist $y = -239{,}296944\ldots\ldots$
so wird $x = -227{,}63647\ldots\ldots$

Man sieht zugleich, daß nur der erste Werth für x und y dem Exempel angemessen ist. Es sind also 1000 Ztn. gekauft worden, der Zentner zu 20 thlr., folglich die Ausgabe = 20000 thlr., davon wurden 300 Ztn. zu $\frac{1000}{7}$ thlr. = $13\frac{3}{7}$ thlr. verkauft, also die Einnahme = 4000 thlr., von den übrigen 700 Ztn. war der Verkaufspreis = $\frac{300}{10}$ = 30 thlr., also die Einnahme = 21000 thlr. Dies gibt den wirklichen Gewinn = 5000 thlr. Der mögliche Gewinn kommt 10000 thlr.

IV. Das Exempel S. 122 und 123. hat die kubische Gleichung gegeben

$$-y^3 - 150y^2 + 100000y = 6000000.$$

Also $$-y^3 - 150y^2 + 100000y - 6000000 = 0.$$

Die Gleichung durch 50 dividirt, kommt

$$-y^3 - 3y^2 + 40y - 48 = 0.$$

Will man das letzte Glied noch kleiner haben, so sucht man einen Werth für y, der kleiner als 48 ist. Dies geschieht, wenn man $y = 3$ annimmt. Setzt man nun $y = z + 3$, so ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{array}{rcl} -y^3 &=& -z^3 - 9z^2 - 27z - 27 \\ -3y^2 &=& -3z^2 - 18z - 27 \\ 40y &=& 40z + 120 \\ -48 &=& -48 \\ \hline \text{Also} & & -z^3 - 12z^2 - 5z + 18 = 0. \end{array}$$

Die Faktoren von 18 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18. Setzt man $z = 1$, so wird die Gleichung = 0, folglich 1 eine Wurzel der Gleichung, und da $y = z + 3$, so ist $y = 4$. Dividirt man nun mit $y - 4$ in $-y^3 - 3y^2 + 40y - 48$, so kommt die quadratische Gleichung

$$-y^2 - 7y + 12 = 0,$$

oder $$y^2 + 7y - 12 = 0.$$

Es ist also

$$y = \frac{-7 \mp \sqrt{(49 + 48)}}{2} = \frac{-7 \mp \sqrt{97}}{2}.$$

aher 1) $y = \frac{-7+\sqrt{97}}{2} = \frac{-7+9,8488578\ldots}{2}$

$= \frac{2,8488578\ldots}{2}$

$= 1,4244289\ldots$

2) $y = \frac{-7-\sqrt{97}}{2} = \frac{-7-9,8488578\ldots}{2}$

$= \frac{-16,8488578\ldots}{2}$

$= -8,4244289\ldots$

Da nun die ursprüngliche Gleichung durch 50 dividirt war, sind die wirklichen Werthe für y

1) $y = 200$,

2) $y = 71,221445\ldots$

ud 3) $y = -421,221445\ldots$

Jeder dieser Werthe gibt einen Werth für x und zwar ede Gleichungen für x einerlei Werth. Man nehme also die rste $x = \frac{ug}{y-ub}$. Ist nun $y = 200$, so wird

$x = \frac{5 \cdot 12000}{200-20 \cdot 5} = \frac{60000}{100} = 600$ Wspl.

Ist $y = 71,221445\ldots$, so wird

$x = \frac{60000}{71,221445-100} = \frac{60000}{-28,778555} = -2084,885.$

Ist $y = -421,221445$, so wird

$x = \frac{60000}{-421,221445-100} = \frac{60000}{-521,221445} = -115,11426.$

Die beiden letzten Werthe geben keine passende Auflösung des Exempels. Es ist also nur Ein Werth für x und y anzunehmen, nämlich $x = 600$ und $y = 200$. Dann sind 600 Wspl. zu 20 thlr. gekauft, 200 Wspl. zu $\frac{600}{20} = 30$ thlr. und 400 Wspl. zu $\frac{200}{5} = 40$ thlr. verkauft worden. Der wirkliche Gewinn ist also $= 10000$ thlr. $= 50 \cdot 200$, und der mögliche 12000 thlr.

V. Das Exempel S. 123 u. 124. gibt die kubische Gleichung

$$-y^3 + \tfrac{545}{3}y^2 - \tfrac{17750}{3}y + 175000 = 0.$$

Um die Brüche wegzuschaffen, multiplizire man die Gleichung mit den Potenzen von 3, also

$$\underset{1}{-y^3} + \underset{3}{\tfrac{545}{3}y^2} - \underset{9}{\tfrac{17750}{3}y} + \underset{27}{175000} = 0,$$

so kommt $-y^3 + 545y^2 - 53250y + 4725000 = 0.$

Diese Gleichung läßt sich durch 5 dividiren, also

$$-y^3+545y^2-53250y+4725000=0,$$
$$1 \quad 5 \quad 25 \quad 125$$

Es kommt $-y^3+109y^2-2130y+37800=0.$

Das letzte Glied in dieser Gleichung wird kleiner, wenn man $y=z+89$ setzt. Alsdann kommt

$$\begin{aligned}
-y^3 &= -z^3-267z^2-23763z-704969\\
+109y^2 &= +109z^2+19402z+863389\\
-2130y &= -2130z-189570\\
+37800 &= +37800\\
\text{also} \quad & -z^3-158z^2-6491z+6650=0.
\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $z=1$, so ist

$$-(z^3+158z^2+6491z)=-6650,$$

welches mit $+6650$ die Gleichung $=0$ macht. Es ist also $z=1$, folglich $y=1+89=90$. Dies wird nun noch mit 5 multiplizirt und durch 3 dividirt, so kommt $y=150$. Dividirt man nun mit $y-150$ in $-y^3+\frac{545}{3}y^2-\frac{17750}{3}y+175000$, so kommt

$$-y^2+\frac{95}{3}y-\frac{3500}{3}=0,$$

oder

$$y^2-\frac{95}{3}y+\frac{3500}{3}=0.$$

Also ist

$$y=\frac{\frac{95}{3}\mp\sqrt{\left[\left(\frac{95}{3}\right)^2-4\cdot\frac{3500}{3}\right]}}{2}$$

$$=\frac{\frac{95}{3}\mp\sqrt{\left(\frac{9025}{9}-\frac{42000}{9}\right)}}{2}$$

$$=\frac{\frac{95}{3}\mp\sqrt{-\frac{32975}{9}}}{2}.$$

Diese Werthe für y sind unmöglich; es hat also y weiter keinen Werth als 150. Aus diesem wird nun x bestimmt. Es war nämlich

$$x=\frac{uy}{y-ub}=\frac{5\cdot\frac{20}{3}\cdot 150}{150-5\cdot 28}=\frac{15000}{150-140}=\frac{5000}{10}=500.$$

Es sind folglich 500 Stn. zu 28 thlr. eingekauft, 150 Stn. zu $\frac{500}{20}=25$ thlr. und 350 Stn. zu $\frac{100}{5}=30$ thlr. verkauft worden. Alsdann kommt der wirkliche Gewinn $=250$ thlr., der mögliche aber $=1000$ thlr. und dieser ist $=\frac{20}{3}\cdot 150$.

§. 75.

Nach diesen Beispielen für kubische Gleichungen, wollen wir auch einige für Gleichungen von höheren Graden geben.

1) Es kauft jemand Tuch und bezahlt die Elle mit b thlr. davon verkauft er einen Theil für p mal weniger Thaler, als er Theil Ellen enthält, den Rest aber für q mal weniger Thaler, als er Ellen gekauft hat. Er gewinnt so f, hätte er s mal so viel Thaler gewonnen, als er zuerst Ellen verkaufte, wenn Alles für den Preis des Restes wäre verkauft worden. Wie viel Ellen hat er gekauft und zuerst verkauft?

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{y}{p}$	x — y	$\frac{x}{q}$	f	sy

Erste Gleichung.

$$xb + sy = \frac{x^2}{q},$$

also $$qbx + qsy = x^2,$$

folglich $$qsy = x^2 - qbx,$$

daher $$y = \frac{x^2 - qbx}{qs}.$$

Zweite Gleichung.

$$xb + f = \frac{y^2}{p} + \frac{x^2}{q} - \frac{yx}{q}.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$sy - f = \frac{xy}{q} - \frac{y^2}{p},$$

oder $$qpsy - qpf = pxy - qy^2,$$

oder $$qpf = qy^2 - pxy + qpsy,$$

oder $$qpf = qy^2 - yp(x - qs).$$

Man berechne nun aus dem Werthe für y in der ersten Gleichung die Werthe von qy^2 und $-yp(x-qs)$, so erhält man die Gleichung

$$qpf = \frac{x^4 - 2qbx^3 + q^2b^2x^2}{qs^2} - \frac{px^3 - pq(s+b)x^2 + pq^2bsx}{qs},$$

oder

$$q^2pfs^2 = x^4 - 2qbx^3 + q^2b^2x^2 - psx^3 + psq(s+b)x^2 - ps^2q^2bx,$$

oder

$$q^2pfs^2 = x^4 - x^3(2qb + ps) + x^2q[qb^2 + ps(s+b)] - ps^2q^2bx,$$

oder

$$x^4 - x^3(2qb + ps) + x^2q[qb^2 + ps(s+b)] - ps^2q^2bx - q^2pfs^2 = 0.$$

Um nun diese Gleichung vom vierten Grade aufzulösen, wollen wir die bekannten Größen durch Zahlen ausdrücken.

Es sei daher $b = 2$ thlr., $p = 80$, $q = 300$, $f = 500$ thlr. und $s = 2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, so ist die Gleichung in Zahlen folgende:

$$x^4 - x^3(2.300.2 + 80.\tfrac{8}{3}) + x^2.300[300.2^2 + 80.\tfrac{8}{3}(\tfrac{8}{3}+1)]$$
$$- 80.(\tfrac{8}{3})^2.300^2.2x - 300^2.(\tfrac{8}{3})^2.80.500 = 0,$$

oder

$$x^4 - x^3.1413\tfrac{1}{3} + x^2.658666\tfrac{2}{3} - x.102400000 - 25600000000 = 0,$$

oder

$$x^4 - \tfrac{4240}{3}x^3 + \tfrac{1976000}{3}x^2 - 102400000x - 25600000000 = 0.$$

Man schaffe nun die Brüche weg, indem man die Glieder mit den Potenzen von 3 multiplizirt. Also

$$x^4 - \tfrac{4240}{3}x^3 + \tfrac{1976000}{3}x^2 - 102400000x - 25600000000 = 0,$$
$$1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81$$

Es kommt

$$x^4 - 4240x^3 + 5928000x^2 - 2764800000x - 2073600000000 = 0$$

Durch 40 dividirt,

$$x^4 - 4240x^3 + 5928000x^2 - 604800000x - 2073600000000 = 0$$
$$1 \quad 40 \quad 1600 \quad 64000 \quad 2560000$$

kommt $x^4 - 106x^3 + 3705x^2 - 43200x - 810000 = 0$.

Das letzte Glied hat freilich viel Faktoren. Da es aber vier Nullen enthält, so muß wohl eine der Wurzeln ein Zehner sein und zugleich in 81 aufgehen. Probirt man mit 30, so ist diese Wurzel zu klein, mit 60 aber hebt sich die Gleichung. Es ist also 60 eine Wurzel derselben. Diese muß aber wegen der vorangegangenen Operationen 40 mal größer und dann wieder 3 mal kleiner gemacht werden; die wahre Wurzel ist also 800.

Um die anderen Wurzeln der Gleichung zu finden, müßte man mit $x - 800$ in die Gleichung

$$x^4 - \tfrac{4240}{3}x^3 + \tfrac{1976000}{3}x^2 - 102400000x - 25600000000 = 0$$

dividiren. Der Quotient gibt die kubische Gleichung

$$x^3 - \tfrac{1840}{3}x^2 + \tfrac{504000}{3}x + 32000000 = 0.$$

Die Brüche durch die Multiplikation mit den Potenzen von 3 weggebracht, kommt

$$x^3 - 1840x^2 + 1512000x + 864000000 = 0.$$

Diese durch 40 dividirt, kommt

$$x^3 - 46x^2 + 945x + 13500 = 0.$$

Diese Gleichung enthält noch zwei positive und eine negative Wurzel, wenn anders diese Wurzeln möglich sind.

Verwandelt man dieselbe nach §. 65. in eine Gleichung, worin das zweite Glied fehlt, indem man $x = z + \frac{46}{3}$ setzt, so erhält man

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& z^3 + 46z^2 + \frac{2116}{3}z + \frac{97336}{27} \\ -46x^2 &=& -46z^2 - \frac{4232}{3}z - \frac{97336}{9} \\ +945x &=& +945z + 14490 \\ +13500 &=& +13500 \end{array}$$

also $z^3 + \frac{719}{3}z + \frac{561958}{27}$

Da das fehlende Glied sowohl positiv, als negativ sein kann, so kann man die Gleichung auch schreiben

$$z^3 \pm 0z^2 + \frac{719}{3}z + \frac{561958}{27} = 0.$$

Nimmt man beim zweiten Gliede das obere Zeichen, so enthält die Gleichung lauter Folgen, also drei negative Wurzeln, nimmt man aber das untere, so enthält sie zwei Abwechselungen und eine Folge, also zwei positive und eine negative Wurzel. Dies widerspricht dem vorigen, also sind gewiß in der Gleichung auch unmögliche Wurzeln.

Wir wollen jetzt die alte Regel des Cardanus anwenden, um die in der kubischen Gleichung, deren zweites Glied fehlt, enthaltenen Wurzeln zu entdecken. Zu dem Ende wollen wir die Koeffizienten der Gleichung $z^3 + \frac{719}{3}z + \frac{561958}{27} = 0$ allgemein durch Buchstaben ausdrücken und dieselben schreiben

$$z^3 + fz + g = 0,$$

also $$z^3 = -fz - g.$$

Gesetzt nun, es ist $z = a + b$, so ist

$$z^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b),$$

und da $a + b = z$ sein soll, so ist auch

$$z^3 = a^3 + b^3 + 3abz,$$

oder $$z^3 = 3abz + a^3 + b^3.$$

Es sei $a^3 = p$ und $b^3 = q$, so ist

$$a = \sqrt[3]{p} \quad \text{und} \quad b = \sqrt[3]{q},$$

also $$ab = \sqrt[3]{pq} \quad \text{und} \quad 3ab = 3\sqrt[3]{pq}.$$

Daher ist $$z^3 = 3z\sqrt[3]{pq} + p + q.$$

Nun war aber $z^3 = -fz - g$, also ist

$$-f = 3\sqrt[3]{pq}$$

und $$-g = p + q,$$

daher $$-\tfrac{1}{3}f = \sqrt[3]{pq},$$

folglich $$(-\tfrac{1}{3}f)^3 = pq,$$

aber $-\frac{1}{27}f^3 = pq,$

und $-\frac{4}{27}f^3 = 4pq.$

Iſt ferner $-g = p+q$, ſo iſt

$$(-g)^2 = (p+q)^2,$$

oder $$g^2 = p^2+2pq+q^2.$$

Zieht man auf beiden Seiten $-\frac{4}{27}f^3 = 4pq$ ab, ſo erhält man $g^2+\frac{4}{27}f^3 = p^2-2pq+p^2,$

und daraus $\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)} = p-q.$

Nun war $-g = p+q$, alſo

$$-g+\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)} = 2p$$

und $$-g-\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)} = 2q,$$

daher $$p = \frac{-g+\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2}$$

und $$q = \frac{-g-\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2}.$$

Da nun $z = a+b$ und $a = \sqrt[3]{p}$ und $b = \sqrt[3]{q}$ genommen war, ſo iſt

$$z = \sqrt[3]{\frac{-g+\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-g-\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2}}.$$

Nun iſt $f = \frac{719}{3},$

daraus findet man $\frac{4}{27}f^3 = \frac{1486779836}{27\cdot 27}.$

Es iſt $g = \frac{561058}{27},$

alſo $g^2 = \frac{314786079364}{27\cdot 27}.$

Folglich $g^2+\frac{4}{27}f^3 = \frac{316272859200}{27\cdot 27}$

und $\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)} = \frac{562381,4179}{27}.$

Daher $-g+\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)} = -\frac{561058}{27}+\frac{562381,4179}{27}$

$$= +\frac{1323,4179}{27}$$

und $$\frac{-g+\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2} = \frac{1323,4179}{2\cdot 27}$$

$$= 24,507739\ldots\ldots =$$

Eben ſo $$\frac{-g-\sqrt{(g^2+\frac{4}{27}f^3)}}{2} = \frac{-561058-562381,4179}{2\cdot 27}$$

$$= -20804,4336648\ldots =$$

Zie

Zieht man nun aus den Werthen für p und q die Kubikwurzel, so ist

$$\sqrt[3]{p} = 2{,}904698,$$

$$\sqrt[3]{q} = -27{,}503331.$$

daher $z = a + b = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} = -24{,}598633.$

Um nun aus dem Werthe für z den Werth für x zu finden, so muß man, da $x = z + \frac{46}{3}$ war, zu jenem Werthe noch $\frac{46}{3}$ addiren. Es ist also

$$x = -24{,}598633 + 15{,}333333 = -9{,}265266.$$

Diesen muß man wegen der Division mit 40 und der Multiplikation mit 3 noch mit 40 multipliziren und durch 3 dividiren, so kommt der wahre Werth von $x = -123{,}53688.$

Dividirt man mit $x + 9{,}265266$ in die kubische Gleichung $x^3 - 46x^2 + 945x + 13500$, so erhält man die irrationale quadratische Gleichung $x^2 - 55{,}265266x + 1457{,}047387$, welche noch zwei unmögliche Wurzeln enthält.

Die Gleichung des Exempels hat also nur zwei rationale Wurzeln, eine rationale und positive, $x = 800$, eine irrationale und negative $x = -123{,}536$ und zwei unmögliche Wurzeln.

Hat man x gefunden, so läßt sich y bestimmen. Es war oben in der ersten Gleichung

$$y = \frac{x^2 - qbx}{q^s},$$

$$\text{also} \quad = \frac{800^2 - 300 \cdot 2 \cdot 800}{300 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{640000 - 480000}{800}$$

$$= \frac{160000}{800} = 200.$$

Die andere Gleichung ist eine quadratische, welche daher zwei Werthe für y gibt. Es war

$$qpf = qy^2 - yp(x - q^s),$$

oder

$$y^2 - y\frac{p(x-q^s)}{q} = pf,$$

also in Zahlen

$$y^2 - y\frac{80(800 - 300 \cdot \frac{2}{3})}{300} = 80 \cdot 500,$$

oder $y^2 - y \cdot 0 = 40000,$

oder $y^2 = 40000,$

also $y = \mp\sqrt{40000} = \mp 200.$

Es hat daher y zwei Werthe, einen positiven und einen negativen, jeder $= 200.$

Der positive gibt folgende Auflösung des Exempels:

Es wurden 800 Ellen gekauft, die Elle zu 2 thlr., al die Ausgabe 1600 thlr. Davon wurden verkauft: 1) 200 El zu $\frac{200}{80} = 2\frac{1}{2}$ thlr., folglich die Einnahme = 500 thlr. 600 Ellen zu $\frac{800}{300} = 2\frac{2}{3}$ thlr., also die Einnahme = 1600 th Dies gibt folglich den wirklichen Gewinn = 500 thlr. und d möglichen $533\frac{1}{3}$ thlr. und dieser ist = $\frac{5}{3}$. 200.

2) Folgendes Exempel wird auf eine Gleichung vom fünft Grade führen:

Es kauft jemand Tuch und bezahlt die Elle mit b thl Davon verkauft er einen Theil, die Elle für p mal weni Thaler, als er Ellen gekauft hat, den Rest aber für ein Preis, welcher gefunden wird, wenn man die Zahl der g kauften Ellen mit m multiplizirt und dies Produkt durch d Zahl der zuerst verkauften Ellen dividirt. Er gewinnt so f thlr. hätte aber, wenn Alles für den Preis des Restes wäre ve kauft worden, eine Summe gewonnen, welche sich findet, wen man die Zahl der zuerst verkauften Ellen mit q multiplizi und das Produkt durch die Zahl aller gekauften Ellen divid

Allgemeine Bezeichnung.

Ganze Waare.	Einkaufspreis.	Theil der Waare.	Verkaufspreis.	Rest der Waare.	Verkaufspreis.	Wirkl. Gewinn.	Mögl. Gewinn.
x	b	y	$\frac{x}{p}$	$x-y$	$\frac{mx}{y}$	f	$\frac{yq}{x}$

Erste Gleichung.

$$xb + \frac{yq}{x} = \frac{mx^2}{y},$$

also

$$byx^2 + y^2q = mx^3.$$

Zweite Gleichung.

$$bx + f = \frac{xy}{p} + \frac{mx^2}{y} - mx.$$

Unterschied der ersten und zweiten Gleichung.

$$\frac{qy}{x} - f = mx - \frac{xy}{p}.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich ein Werth für y entwi

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$pqy - pxf = pmx^2 - x^2y,$$

oder

$$pqy + x^2y = pmx^2 + pxf,$$

so $y(pq+x^2) = p(mx^2+fx)$,

glich $y = \frac{p(mx^2+fx)}{pq+x^2}$.

Setzt man nun diesen Werth für y in die Gleichung

$$byx^2+y^2q = mx^3,$$

erhält man, wenn man bx^2 mit $\frac{p(mx^2+fx)}{pq+x^2}$ und das

uadrat von $\frac{p(mx^2+fx)}{pq+x^2} = \frac{p^2m^2x^4+2p^2mfx^3+p^2f^2x^2}{p^2q^2+2pqx^2+x^4}$

it q multiplizirt, die Gleichung

$$\frac{pmx^4+bpfx^3}{pq+x^2}+\frac{qp^2m^2x^4+2qp^2mfx^3+qp^2f^2x^2}{p^2q^2+2pqx^2+x^4} = mx^3.$$

Dividirt man alle Glieder durch x^2, so kommt:

$$\frac{bpmx^2+bpfx}{pq+x^2}+\frac{qp^2m^2x^2+2qp^2mfx+qp^2f^2}{p^2q^2+2pqx^2+x^4} = mx.$$

Bringt man die Glieder unter einerlei Nenner, indem man pmx^2+bpfx mit $pq+x^2$ und mx mit $p^2q^2+2pqx^2+x^4$ ultiplizirt, wodurch alle Glieder auf den Nenner $p^2q^2+2pqx^2+x^4$ gebracht werden, so erhält man:

$$p^2mqx^2+bpmx^4+bp^2fqx+bpfx^3+qp^2m^2x^2+2qp^2mfx+qp^2f^2 = mp^2q^2x+2pqmx^3+mx^5.$$

Diese Gleichung nach den Potenzen von x geordnet und uf o gebracht, gibt

$$mx^5-bpmx^4+2pqmx^3-bpfx^3-bp^2mqx^2-qp^2m^2x^2+mp^2q^2x-bp^2fqx-2qp^2mfx-qp^2f^2 = 0.$$

Dividirt man durchgängig mit m, so erhält man:

$$x^5-bpx^4+2pqx^3-\frac{bpf}{m}x^3-bp^2qx^2-qp^2mx^2+p^2q^2x-\frac{bp^2fq}{m}x-2qp^2fx-\frac{qp^2f^2}{m} = 0.$$

Nun ziehe man die Glieder, welche gemeinschaftliche Potenzen von x haben, zusammen. Dies gibt:

$$x^5-bpx^4+\left(2q-\frac{bf}{m}\right)px^3-(b+m)qp^2x^2+\left(q-\frac{bf}{m}-2f\right)p^2qx-\frac{qp^2f^2}{m} = 0.$$

Es sei nun der Einkaufspreis $b = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ thlr., die Größe p, welche den ersten Verkaufspreis bestimmt, = 200, die Größe m, wodurch der zweite Verkaufspreis bestimmt wird, $= \frac{7}{8}$, der wirkliche Gewinn $f = 500$ und q, welches den täglichen Gewinn bestimmt, = 1800.

Es iſt alſo

$$-bp = -\tfrac{5}{2}\cdot 200 = -500,$$

$$+p\left(2q-\frac{bf}{m}\right) = 200\left(3600-\frac{\frac{5}{2}\cdot 500}{\frac{7}{6}}\right) = 200(3600-1250\cdot\tfrac{6}{7}) = \frac{3540000}{7},$$

$$-qp^2(b+m) = -1800\cdot 200^2\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{7}{6}\right) = -72000000\cdot\tfrac{11}{3} = -264000000,$$

$$+p^2q\left(q-\frac{bf}{m}-2f\right) = 200^2\cdot 1800\left(1800-\frac{\frac{5}{2}\cdot 800}{\frac{7}{6}}-2\cdot 500\right) = 72000000\left(1800-\tfrac{18500}{7}\right) = 72000000\cdot-\tfrac{1900}{7} = -\frac{136800000000}{7},$$

$$-\frac{qp^2f^2}{m} = -\frac{1800\cdot 200^2\cdot 500^2}{\frac{7}{6}} = -\frac{1800\cdot 40000\cdot 250000\cdot 6}{7} = -\frac{10800000000000}{7}.$$

Die Gleichung in Zahlen iſt alſo:

$$x^5-500x^4+\tfrac{3540000}{7}x^3-264000000x^2-\tfrac{136800000000}{7}x-\tfrac{10800000000000}{7}=0.$$

Um die Brüche wegzubringen, multiplizire man die Glieder mit den Potenzen von 7, ſo kommt

$$x^5-3500x^4+24780000x^3-9055200000x^2-469224000000x-25930800000000=0.$$

Dividirt man jetzt die Gleichung durch 100, ſo kommt

$$x^5-35x^4+2478x^3-90552x^2-469224x-25930800=0.$$

Die einfachen Faktoren des letzten Gliedes ſind: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und zwar kommen vom Faktor 7 nicht nur die erſte, ſondern auch die zweite, dritte und vierte, vom Faktor 3, die erſte, zweite und dritte, vom Faktor 2 die erſte, zweite, dritte und vierte Potenz als Faktoren im Gliede vor, nämlich die Zahlen 7, 49, 343, 2401; 3, 9, 27; 2, 4, 8, 16. Daraus ließe ſich ſchon mit Wahrſcheinlichkeit ſchließen, daß die Wurzel unter dieſen Faktoren 2, 3, 7, oder in den daraus durch Multiplikation zuſammengeſetzten Zahlen enthalten ſein müſſe, alſo in den Zahlen 6, 14, 21, 42. Verſucht man nun dieſe Zahlen, ſo ergibt ſich, daß die Wurzel 42 die Glei-

hung aufhebt. Es ist also 42 eine Wurzel der Gleichung, und wenn man diese durch 7 dividirt und mit 100 multiplizirt, so kommt das gesuchte $x = 600$.

Es sind also 600 Ellen gekauft worden. Um y zu finden, rechne man die Gleichung

$$y = \frac{p(mx^2+fx)}{pq+x^2}$$
$$= \frac{200(\frac{7}{3}.360000+500.600)}{200.1800+360000}$$
$$= \frac{200(420000+300000)}{360000+360000}$$
$$= \frac{200.720000}{720000} = 200 \text{ Ellen.}$$

Da der Einkaufspreis $= 2\frac{1}{2}$ thlr. war, so ist die Ausgabe $= 1500$ thlr. Der Verkaufspreis für die 200 Ellen ist $\frac{600}{200} = 3$ thlr., also die Einnahme $= 600$ thlr. Der Verkaufspreis des Restes ist $\frac{\frac{7}{3}.600}{200} = \frac{700}{200} = 3\frac{1}{2}$ thlr., also die Einnahme $= 1400$ thlr., folglich die ganze Einnahme $= 2000$ thlr. und der wirkliche Gewinn 500 thlr., wie angegeben war. Wäre Alles zu $3\frac{1}{2}$ thlr. verkauft worden, so wäre die Einnahme $= 2100$ thlr., also der Gewinn 600 thlr. gewesen, und dieser ist $= \frac{200.1800}{600}$.

Die Gleichung

$$x^5-35x^4+2478x^3-90552x^2-469224x-25930800 = 0$$

enthält noch vier Wurzeln, welche aber sämmtlich unmöglich sind. Wir wollen daher, da sie auf die gewöhnliche Art nicht gefunden werden können, uns mit ihrer Aufsuchung nach anderen künstlichen Regeln nicht aufhalten.

Von der Auffindung der Wurzeln durch Näherung.

§. 76.

Wenn eine Gleichung auch in ganzen Zahlen keine Wurzeln hat, so kann sie doch mögliche gebrochene und irrationale Wurzeln enthalten. Diese kann man durch die Methode der Näherung finden.

So wie in einer Gleichung $= z$ der Werth der unbekannten Größe x in den Gliedern derselben sich ändert, so muß auch der Werth von z sich ändern, und nur diejenigen Werthe von x, welche $z = 0$ geben, sind die Wurzeln der Gleichung. Ist die Wurzel ein Bruch oder eine Irrationalzahl, so muß sie

zwischen zwei nur um 1 unterschiedene ganze Zahlen fallen und diese letzteren sind dann die Gränzen der gebrochenen oder irrationalen Wurzeln.

Wenn man nun für x nach einander alle positive und negative ganze Zahlen schreibt und es ergeben sich zwei nicht auf einander folgende positive oder negative Werthe, welche im Werth von z entgegengesetzt, einmal positiv, das andere Mal negativ geben, so fällt zwischen diese beiden Werthe eine Wurzel der Gleichung.

Die Richtigkeit dieses Satzes ist offenbar. Gesetzt, nun der Werth von x positiv ist, man habe für dasselbe eine Zahl $= q$ gefunden, welche den Werth z der Gleichung noch positiv macht, der nächstfolgende Werth $q+1$ mache aber denselben negativ, so muß es nothwendig zwischen beiden einen Werth geben, der $z = 0$ macht, da der Übergang aus dem Positiven in das Negative durch 0 geschieht. Zwar kann es auch einen Übergang aus dem Positiven in das Negative durch das Unendliche geben (wovon man bei den trigonometrischen Linien Beispiele findet), aber ein solcher Übergang kann hier nicht Statt finden, da z und x bestimmte endliche Größen sein sollen.

Eben so schließt man, wenn ein positiver Werth für x den Werth z negativ macht und dieser, wenn x wächst, positiv wird.

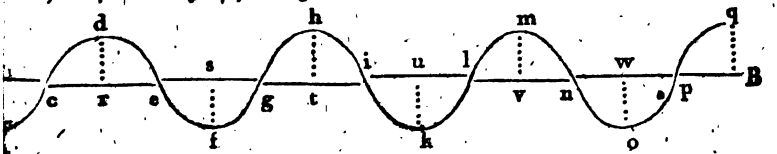
Es sei die Gleichung $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 6x - 9$ gegeben. Setzt man $x = 2$, so kommt $16+48+24-12-9 = 88-21 = 67$, und setzt man $x = 1$, so kommt $1+6+6-6-9 = -1$ also fällt die Wurzel zwischen 1 und 2.

Ist x negativ und der zugehörige Werth von z ebenfalls, so wird, wenn mit Veränderung des Werthes von x der negative Werth von z abnimmt und endlich positiv wird, es nothwendig einen Werth für $z = 0$ geben müssen, der zwischen den kleinsten negativen und positiven Werth von z fällt; der wahre negative Werth von x wird alsdann zwischen den beiden negativen desselben liegen, die für z den kleinsten negativen und positiven Werth geben. Es sei die Gleichung $x^3 + 3x^2 + 4x + 10 = 0$ gegeben. Setzt man $x = -3$, so kommt $-27+27-12+10 = -2$ und setzt man $x = -2$, so erhält man $-8+12-8+10 = +6$; es wird also ein negativer Werth von x zwischen -3 und -2 fallen.

Eben so schließt man, wenn der Werth von z für irgend ein negatives x positiv war und durch das Wachsen desselben negativ wird.

§. 77.

Umgekehrt kann man aber nicht schließen, daß, wenn zwei auf einander folgende ganze Zahlen, als Werthe von x, keine entgegengesetzte Werthe von z geben, alsdann keine Wurzel der Gleichung zwischen die beiden Werthe von x fiele; es können vielmehr 2, 4, 6 überhaupt eine gerade Anzahl von Wurzeln zwischen die beiden nächsten ganzen Zahlen fallen, welche für die Werthe von z einerlei Zeichen geben. Und wenn die Werthe von z entgegengesetzte Zeichen erhalten, so können nicht bloß ein Werth, sondern 1, 3, 5, überhaupt eine ungerade Anzahl von Werthen für z dazwischen liegen. Dies erläutert folgende Figur



Wenn die unbegränzte gerade Linie AB von der krummen dfhkmoq mehrere Male geschnitten wird, so kann man sich die Perpendikel bA, dr, fs u. s. w. als die einzelnen Werthe von z und zwar die über AB liegenden als die positiven, die unter derselben als die negativen vorstellen. Von b aus nehmen die negativen Werthe immer mehr ab, bis sie in dem Durchschnitte c = o werden, dann wachsen sie positiv bis zu einer gewissen Größe, nehmen wieder ab, gehen in e in o und dann ins Negative über u. s. w. Es fällt also erstlich immer ein Werth = o zwischen zwei nächste entgegengesetzte Werthe. Da nun aber nach 2, 4, 6 u. s. w. Durchschnitten die Lage der Perpendikel wieder die nämliche, nach 1, 3, 5 u. s. w. Durchschnitten aber die entgegengesetzte wird, so werden, wenn bA und fs zwei zunächst auf einander folgende Werthe von z in ganzen Zahlen und von einerlei Zeichen ausdrücken, zwei Wurzeln c und e, welche z = o geben, und wenn bA und ku oder bA und ow solche Werthe sind, vier Wurzeln c, e, g, i oder sechs Wurzeln c, e, g, i, l, n, also immer eine gerade Zahl derselben dazwischen fallen. Dagegen liegen zwischen zwei entgegengesetzten Werthen entweder 1 oder 3, oder 5 u. s. w. Werthe, welche z = o geben, nämlich c zwischen bA und dr; c, e, g zwischen bA und ht; c, e, g, i, l zwischen bA und mv u. s. w.

§. [illegible]

Aufgabe.

Die gebrochenen und irrationalen Wurzeln einer gegebenen Gleichung durch Näherung zu finden.

Auflösung.

Man suche zuvörderst die Gränzen der möglichen Wurzeln. Nun setze man noch einander alle ganze positive und negative Zahlen, welche zwischen die Gränzen fallen, statt x in die Gleichung und bemerke die daraus hervorgehenden Werthe der Gleichung mit ihren Zeichen. In allen Fällen, wo die Zeichen in die entgegengesetzten übergehen, sind die zugehörigen Werthe von x die um 1 unterschiedenen Gränzen von wenigstens einer möglichen Wurzel. Hat man z. B. für x die Größe q gesetzt und daraus für die Gleichung einen Werth = z gefunden, so wird, wenn q + 1 für x gesetzt, der Gleichung den Werth $-z'$ gibt, die Wurzel derselben zwischen q und q + 1 fallen, also sind q und q + 1 ihre Gränzen. Zwischen die Werthe z und $-z'$ fällt der Werth = 0, den die Gleichung bekommen muß, wenn die wahre Wurzel gefunden ist. Man kann daher folgende Proportion aufsetzen: Der Unterschied von z und $-z'$ verhält sich zum Unterschiede von q und q + 1, wie der Unterschied von z und 0 zum Unterschiede von q und der wahren Wurzel, welcher w heißen mag, also

$$z-(-z') : q+1-q = z-0 : w,$$

oder

$$z+z' : 1 = z : w.$$

Man berechnet nun w in Zehntheilen, oder auch noch auf Hundertel und Tausentel und addirt das Herausgekommene zu q, so hat man entweder die wahre, oder doch eine nähere Wurzel gefunden. Das Erstere findet Statt, wenn man die Wurzel q + w in die Gleichung setzt und diese nun = 0 wird; das Letztere, wenn man für die Gleichung einen neuen Werth z'' erhält, der mit dem ihm am nächsten kommenden Werth z oder z' zwei neue engere Gränzen der Gleichung gibt, woraus man durch Fortsetzung des angegebenen Verfahrens die Wurzel noch genauer findet. Diese Operation setzt man nun so lange fort, bis man eine Wurzel findet, welche, statt x in die Gleichung gesetzt, einen Werth derselben gibt, der von 0 so wenig verschieden ist, daß man den Unterschied für nichts achten kann.

Wir wollen nun diese Regel durch ein Beispiel erörtern. Es sei die Gleichung gegeben

$$x^4 + \tfrac{23}{6}x^3 - 9x^2 - 23x + 18 = 0.$$

Da die Gleichung zwei Folgen und zwei Abwechselungen hat, so muß sie zwei negative und zwei positive Wurzeln enthalten. Man nehme zuerst die Faktoren des letzten Gliedes 1, 2, 3, 6, 9, 18, und setze jeden positiv und negativ, um zu sehen, ob etwa die Gleichung eine ganze Wurzel enthalte. Setzt man nun

$x = +18$,	so kommt	$z = +124020$,
$x = +9$	:	:	$z = +8437\frac{1}{2}$,
$x = +6$	:	:	$z = +1680$,
$x = +3$	:	:	$z = +52\frac{1}{2}$,
$x = +2$	:	:	$z = -17\frac{1}{3}$,
$x = +1$	:	:	$z = -9\frac{1}{6}$,
$x = -1$	:	:	$z = +29\frac{1}{6}$,
$x = -2$	:	:	$z = +13\frac{1}{3}$,
$x = -3$	:	:	$z = -16\frac{1}{2}$,
$x = -6$	:	:	$z = +300$,
$x = -9$	:	:	$z = +3262\frac{1}{2}$,
$x = -18$	:	:	$z = +80136$.

Es ist also keiner dieser Faktoren eine Wurzel der Gleichung. Aber so viel ergibt sich schon aus den Zeichen der gefundenen Werthe, daß eine Wurzel fallen müsse zwischen $+3$ und $+2$, eine andere zwischen $+1$ und -1, eine dritte zwischen -2 und -3 und die vierte zwischen -3 und -6. Die Gränzen der ersten und dritten Wurzel sind auf diese Art genau genug bestimmt, aber die zweite Wurzel kann noch zwischen $+1$ und 0 und zwischen 0 und -1, die vierte aber zwischen -3 und -4, zwischen -4 und -5 und zwischen -5 und -6 fallen. Man suche also noch die näheren Gränzen, indem man x noch $= 0$, $x = -4$, $x = -5$ setzt. Dann erhält man für

$x = 0$	den Werth	$z = +18$,
$x = -4$	:	:	$z = -22\frac{2}{3}$,
$x = -5$	:	:	$z = +53\frac{5}{6}$.

Daraus sieht man, daß die zweite Wurzel falle zwischen $+1$ und 0, und die vierte zwischen -4 und -5.

Wir wollen jetzt zuerst die zwischen $+2$ und $+3$ fallende Wurzel suchen. Es ist $z = 17\frac{1}{3}$ und $z' = 52\frac{1}{2}$ und $q + 1 - q = 3 - 2 = 1$, also hat man die Proportion:

$$17\tfrac{1}{3} + 52\tfrac{1}{2} : 17\tfrac{1}{3} = 1 : w,$$

oder

$$69\tfrac{5}{6} : 17\tfrac{1}{3} = 1 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = 0{,}2$, also ist die Wurzel

$$r = q + w = 2 + 0{,}2 = 2{,}2.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z^{II} = -29{,}9153,$$

es fällt daher die wahre Wurzel zwischen 2,2 und 3. Nun hat man wieder die Proportion

$$29{,}9153 + 52{,}5 : 29{,}9153 = 3 - 2{,}2 : w,$$

oder $82{,}4153 : 29{,}9153 = 0{,}8 : w.$

Die Rechnung gibt $w = 0{,}2$, also ist

$$r = 2{,}2 + 0{,}2 = 2{,}4.$$

Setzt man diesen Werth wieder für x, so kommt

$$z^{III} = -2{,}8704,$$

also fällt die Wurzel noch zwischen 2,4 und 3. Daher

$$2{,}8704 + 52{,}5 : 2{,}8704 = 3 - 2{,}4 : w,$$

oder $55{,}3704 : 2{,}8704 = 0{,}6 : w.$

Die Rechnung gibt $w = 0{,}3$, und folglich

$$r = 2{,}4 + 0{,}3 = 2{,}7.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z^{IV} = +18{,}8856,$$

also fällt die Wurzel zwischen 2,4 und 2,7. Daher hat man jetzt die Proportion

$$29{,}9153 + 18{,}8856 = 2{,}7 - 2{,}4 : w,$$

oder $48{,}8009 : 18{,}8856 = 0{,}3 : w.$

Die Rechnung gibt $w = 0{,}1$, also

$$r = 2{,}4 + 0{,}1 = 2{,}5.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z^{V} = +3{,}2083,$$

also fällt die Wurzel zwischen 2,4 und 2,5. Daher

$$2{,}8704 + 3{,}2083 = 2{,}5 - 2{,}4 : w,$$

oder $6{,}0787 : 2{,}8704 = 0{,}1 : w.$

Es kommt $w = 0{,}04$, daher

$$r = 2{,}4 + 0{,}04 = 2{,}44.$$

Dieser Werth für x gesetzt, gibt

$$z^{VI} = -0{,}563,$$

also fällt die Wurzel zwischen 2,44 und 2,5. Daher

$$0{,}563 + 3{,}2083 : 0{,}563 = 2{,}5 - 2{,}44 : w,$$

oder $3{,}7713 : 0{,}563 = 0{,}06 : w.$

Die Rechnung gibt $w = 0{,}008$, also

$$r = 2{,}44 + 0{,}008 = 2{,}448.$$

Dieser Werth für x gesetzt, kommt

$$z^{VII} = -0{,}0903,$$

so fällt r zwischen 2,448 und 2,5. Daher

0,0903 + 3,2083 : 0,0903 = 2,5 − 2,448 : w,
er 3,2986 : 0,0903 = 0,052 : w.

Es kommt w = 0,001, also

r = 2,448 + 0,001 = 2,449.

Dieser Werth anstatt x, gibt

$$z^{VIII} = -0{,}029713,$$

so fällt r zwischen 2,449 und 2,5. Daher

0,029713 + 3,2083 : 0,029713 = 2,5 − 2,449 : w,
er 3,238013 : 0,029713 = 0,051 : w.

Es kommt w = 0,0004, daher

r = 2,449 + 0,0004 = 2,4494.

Dieser Werth anstatt x, gibt

$$z^{IX} = -0{,}0054,$$

so die Wurzel zwischen 2,4494 und 2,5. Daher

0,0054 + 3,2083 : 0,0054 = 2,5 − 2,4494 : w,
er 3,2137 : 0,0054 = 0,0506 : w.

Es kommt w = 0,00008, also

r = 2,4494 + 0,00008 = 2,44948.

Dieser Werth für x gesetzt, gibt

$$z^{X} = -0{,}00083,$$

lso fällt r zwischen 2,44948 und 2,5. Daher

0,00083 + 3,2083 : 0,00083 = 2,5 − 2,44948 : w,
der 3,20913 : 0,00083 = 0,05052 : w.

Es kommt w = 0,00001, also

r = 2,44948 + 0,00001 = 2,44949.

Dieser Werth für x, gibt

$$z^{XI} = +0{,}0000136,$$

lso fällt die Wurzel zwischen 2,44948 und 2,44949. Daher

0,00083 + 0,0000136 : 0,00083 = 2,44949 − 2,44948 : w,
der 0,0008436 : 0,00083 = 0,00001 : w.

Es kommt w = 0,000009, also ist

r = 2,44948 + 0,000009 = 2,449489.

So kann man also durch Fortsetzung dieses Verfahrens immer mehr Dezimalstellen der Wurzel finden und diese so immer genauer bestimmen. Die wahre Wurzel der Gleichung ist $= \sqrt{6}$.

Jetzt wollen wir noch die zwischen -4 und -5 fallende negative Wurzel suchen. Für $x = -4$ ist $z = -22\frac{1}{3}$ und für $x = -5$ ist $z' = +53\frac{5}{6}$. Dies gibt die Proportion

$$22\tfrac{1}{3} + 53\tfrac{5}{6} : 22\tfrac{1}{3} = -5-(-4) : w,$$

oder $$76\tfrac{1}{6} : 22\tfrac{1}{3} = -1 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = -0{,}15$, also

$$r = -4+(-0{,}15) = -4{,}15.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z'' = -19{,}3036,$$

also fällt die Wurzel zwischen $-4{,}15$ und -5. Daher

$$19{,}3036 + 53{,}8333 : 19{,}3036 = -5-(-4{,}15) : w,$$

oder $$73{,}1369 : 19{,}3036 = -0{,}85 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = -0{,}22$, also ist

$$r = -4{,}15+(-0{,}22) = -4{,}37.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z''' = -8{,}57542,$$

also fällt die Wurzel zwischen $-4{,}37$ und -5. Daher

$$8{,}57542 + 53{,}83333 : 8{,}57542 = -5-(-4{,}37) : w,$$

oder $$62{,}40875 : 8{,}57542 = -0{,}63 : w.$$

Es kommt $w = -0{,}086$, also ist

$$r = -4{,}37+(-0{,}086) = -4{,}456.$$

Dieser Werth für x gesetzt, gibt

$$z^{IV} = -3{,}1287,$$

also fällt die Wurzel zwischen $-4{,}456$ und -5. Daher

$$3{,}1287 + 53{,}8333 : 3{,}1287 = -5-(-4{,}456) : w,$$

oder $$56{,}9620 : 3{,}1287 = -0{,}544 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = -0{,}03$, also

$$r = -4{,}456+(-0{,}03) = -4{,}486.$$

Diesen Werth für x gesetzt, kommt

$$z^{V} = -1{,}018882,$$

also fällt die Wurzel zwischen $-4{,}486$ und -5. Daher

$$1{,}018882 + 53{,}833333 : 1{,}018882 = -5-(-4{,}486) : w,$$

oder $$54{,}852215 : 1{,}018882 = -0{,}514 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = -0{,}009$, also

$$r = -4{,}486+(-0{,}009) = -4{,}495.$$

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$$z^{VI} = -0{,}3666,$$

also fällt die Wurzel zwischen $-4{,}495$ und -5. Daher

$$0{,}3666 + 53{,}8333 : 0{,}3666 = -5-(-4{,}495) : w,$$

oder $$54{,}1999 : 0{,}3666 = -0{,}505 : w.$$

Die Rechnung gibt $w = -0{,}003$, also

$r = -4{,}495 + (-0{,}003) = -4{,}498$.

Setzt man diesen Werth für x, so kommt

$z^{VII} = -0{,}147007$,

so fällt die Wurzel zwischen $-4{,}498$ und -5. Daher

$0{,}147007 + 53{,}833333 : 0{,}147007 = -5-(-4{,}498) : w$,

$53{,}98034 : 0{,}147007 = -0{,}502 : w$.

Die Rechnung gibt $w = -0{,}001$, also ist

$r = -4{,}498 + (-0{,}001) = -4{,}499$.

Diesen Werth für x gesetzt, gibt

$z^{VIII} = -0{,}0735643$,

so fällt die Wurzel zwischen $-4{,}499$ und -5. Daher

$0735643 + 53{,}8333333 : 0{,}0735643 = -5-(-4{,}499) : w$,

$53{,}9068976 : 0{,}0735643 = -0{,}501 : w$.

Die Rechnung gibt $w = -0{,}0007$, also

$r = -4{,}499 + (-0{,}0007) = -4{,}4997$.

Setzt man so das Verfahren immer weiter fort, so kommt man endlich auf $r = -4{,}499999\ldots\ldots$, welches nur wenig von $-4{,}5$ verschieden ist. In der That ist die wahre Wurzel $= -4{,}5$.

Sucht man auf eben diese Art die zwischen $+1$ und 0 allende Wurzel, so wird man dafür $0{,}666666\ldots$ oder $\frac{2}{3}$ finden. Die vierte Wurzel aber, welche zwischen -2 und -3 fällt, wird $= -2{,}44949 = -\sqrt{6}$ gefunden werden.

Hat man zwei Wurzeln, z. B. $x = -4{,}5$ und $x = \frac{2}{3}$ gefunden, so kann man mit dem Produkte $(x+4{,}5).(x-\frac{2}{3}) = x^2 + 3\frac{5}{6}x - 3 = 0$ in die Gleichung $x^4 + \frac{23}{6}x^3 - 9x^2 - 23x + 18 = 0$ dividiren, so kommt $x^2 - 6 = 0$, also $x^2 = 6$ und folglich $x = \mp\sqrt{6}$. Dies sind also die beiden anderen Wurzeln der Gleichung, nämlich $x = +\sqrt{6}$ und $x = -\sqrt{6}$.

§. 79.

Einen kürzern Weg, die Wurzel durch Näherung zu finden, zeigt folgende

Aufgabe.

Wenn die Wurzel einer Gleichung in Zehntheilen genau gefunden worden ist, sich ihrem wahren Werthe schneller, als durch das obige Verfahren zu nähern.

Es sei die in Zehntheilen genau bestimmte Wurzel = Q und das, was noch an ihrem wahren Werthe fehlt, = p, so läßt sich dieses p so bestimmen: Man setze überall Q+p statt x in die Gleichung, lasse aber die das Quadrat von p übersteigenden Potenzen von p weg, so wird man eine quadratische Gleichung erhalten, worin außer p lauter bekannte Größen vorkommen. Da nämlich alle höhere Potenzen von p, die das Quadrat übersteigen, weggelassen worden sind, so kann die neue Gleichung keinen höhern Grad als den zweiten erhalten. Nun läßt sich p nach den Regeln für die Auflösung quadratischer Gleichungen bestimmen, und der Werth desselben zu Q addirt, wird die wahre Wurzel gleich auf mehrere Dezimalstellen richtig geben. Da man nämlich die Wurzel in Zehntheilen genau weiß, so ist p kleiner, als ein Zehntheil, und das weggelassene p^2 kleiner, als $\frac{1}{1000}$; man findet daher die Wurzel gleich in Tausendtheilen richtig. Weiß man die Wurzel in Hundertheilen genau, so ist p^2 kleiner als $\frac{1}{10000}$; man erhält also die Wurzel gleich in Millionentheilen genau.

Wir wollen die vorige Gleichung zum Beispiel nehmen. Durch das §. 78. gezeigte Verfahren hat man die zwischen +1 und +3 fallende Wurzel in Zehntheilen genau gefunden = 2,4. Nun setze man 2,4 + p statt x in die Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned}
x^4 &= (2{,}4+p)^4 = 2{,}4^4 + 4.2{,}4^3.p + 6.2{,}4^2.p^2 + 4.2{,}4.p^3 + p^4\\
\tfrac{23}{6}x^3 &= \tfrac{23}{6}(2{,}4+p)^3 = \tfrac{23}{6}.2{,}4^3 + \tfrac{23}{6}.3.2{,}4^2.p + \tfrac{23}{6}.3.2{,}4.p^2 + \tfrac{23}{6}p^3\\
-9x^2 &= -9(2{,}4+p)^2 = -9.2{,}4^2 - 9.2.2{,}4.p - 9.p^2\\
-23x &= -23(2{,}4+p) = -23.2{,}4 - 23.p\\
+18 &= +18.
\end{aligned}$$

Läßt man nun die Produkte, worin p^3 und p^4 vorkommt, weg, so wird

$$\begin{array}{rrrrrr}
x^4 &= & 33{,}1776 & +55{,}296p & +34{,}56p^2\\
\frac{23}{6}x^3 &= & 52{,}992 & +66{,}24\ p & +27{,}6\ p^2\\
-9x^2 &= & -51{,}84 & -43{,}2\ p & -9\ p^2\\
-23x &= & -55{,}2 & -23\ p & \\
+18 &= & +18 & &
\end{array}$$

Also $\quad -2{,}8704 + 55{,}336p + 53{,}16p^2 = 0.$

Oder $\quad 53{,}16p^2 + 55{,}336p - 2{,}8704 = 0.$

Mit dem Koeffizienten von p^2 dividirt, kommt

$$p^2 + 1{,}040933p - 0{,}053996 = 0.$$

Es ist folglich

$$p = \frac{-1{,}040933 \mp \sqrt{(1{,}040933^2 + 4.0{,}053996)}}{2}.$$

Die Rechnung gibt $p = 0{,}049517$, also ist

$$Q + p = 2{,}4 + 0{,}049517 = 2{,}449517.$$

Wie die Vergleichung mit dem Obigen gibt, ist also die Wurzel bis auf Tausendtheile richtig.

Setzen wir, daß die Wurzel bis auf Hunderttheile richtig gefunden worden ist, also $Q = 2{,}44$, so ist die genäherte Wurzel $= Q + p = 2{,}44 + p$. Man setze also dieses statt x, so kommt

$$\begin{aligned}
x^4 &= (2{,}44+p)^4 = 2{,}44^4 + 4.2{,}44^3.p + 6.2{,}44^2.p^2 + 4.2{,}44.p^3 + p^4,\\
\tfrac{23}{6}x^3 &= \tfrac{23}{6}(2{,}44+p)^3 = \tfrac{23}{6}.2{,}44^3 + \tfrac{23}{6}.3.2{,}44^2.p + \tfrac{23}{6}.3.2{,}44.p^2 + \tfrac{23}{6}.p^3,\\
9x^2 &= -9(2{,}44+p)^2 = -9.2{,}44^2 - 9.2.2{,}44.p - 9.p^2,\\
23x &= -23(2{,}44+p) = -23.2{,}44 - 23.p,\\
18 &= +18.
\end{aligned}$$

Die Produkte, worin p^3 und p^4 vorkommt, weggelassen, kommt

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 = & 35{,}44535296 & +58{,}107136p & +35{,}7216p^2\\
\frac{23}{6}x^3 = & 55{,}686005 & +68{,}4664\ p & +28{,}06\ p^2\\
-9x^2 = & -53{,}5824 & -43{,}92\ p & -9\ p^2\\
-23x = & -56{,}12 & -23\ p & \\
+18 = & +18 & & \\
\hline
\text{also} & -0{,}57104204 & +59{,}653536p & +54{,}7816p^2 = 0.
\end{array}$$

oder $$54{,}7816p^2 + 59{,}653536p - 0{,}57104204 = 0.$$

Mit dem Koeffizienten von p^2 dividirt, kommt

$$p^2 + 1{,}0889335p - 0{,}010423974 = 0.$$

Es ist also

$$p = \frac{-1{,}0889335 \mp \sqrt{(1{,}0889335^2 + 4.0{,}010423974)}}{2}.$$

Die Rechnung gibt $p = 0{,}0094899$, also die genäherte Wurzel $= 2{,}44 + 0{,}0094899 = 2{,}4494899$, welche bis auf die Millionentheile richtig ist.

Ist die Wurzel bis auf Tausendtheile richtig bekannt, so findet man sie durch diese Methode bis auf tausend Millionentheile richtig u. s. w.

§. 80.

Bei Gleichungen von hohen Graden ist aber auch diese Methode mühsam und weitläuftig. Man erleichtert sich daher die Arbeit, wenn man auch das Quadrat von p wegläßt und nur die erste Potenz desselben beibehält. Dann läßt sich p durch eine einfache Gleichung bestimmen. Da nun aber sein

Werth auch weniger genau gefunden wird, so muß man die Arbeit nothwendig wiederholen, um die Wurzel so genau, als verlangt wird, zu finden.

Drittes Kapitel.

Von den unbestimmten Gleichungen.

§. 81.

Sobald in einer Gleichung mehr, als eine unbekannte Größe enthalten ist, so wird dieselbe unbestimmt. Ist z. B. $a = x + y$, so ist $a - x = y$, und es ist einleuchtend, daß y immer andere und andere Werthe bekommen muß, so wie der Werth von x verändert wird. Sind daher in einer Aufgabe mehr unbekannte Größen enthalten, als aus derselben von einander unabhängige Gleichungen gebildet werden können, so ist die Aufgabe unbestimmt; denn nachdem man in jeder Gleichung eine unbekannte Größe bestimmt und ihren Werth gehörig substituirt hat, so bleiben immer noch so viel unbekannte Größen zurück, als deren mehr, als die Zahl der Gleichungen, vorhanden waren, und man bekommt daher zuletzt auf eine Gleichung, die mehr als eine unbekannte Größe enthält, für die man beliebige Werthe setzen kann, wodurch sich also auch die Werthe der andern unbekannten Größen ändern. Es sei z. B.

$$xy = az \quad \text{und} \quad x + y = bz,$$

so ist

$$x = \frac{az}{y} \qquad x = bz - y,$$

daher

$$\frac{az}{y} = bz - y,$$

oder

$$az = byz - y^2,$$

oder

$$y^2 - byz = -az,$$

also

$$y = \frac{bz \mp \sqrt{(bz^2 - 4az)}}{2}.$$

woraus offenbar erhellet, daß y und folglich auch x seinen Werth ändern müsse, so wie man der Größe z andere und andere Werthe gibt. Es lassen daher solche Aufgaben unzählige Auflösungen

§. 8

§. 82.

Indessen wird die Zahl dieser Auflösungen öfters dadurch eschränkt, daß man als Bedingung hinzufügt, die Werthe der nbekannten Größen sollen lauter ganze und positive Zahlen in, wodurch also alle Brüche und negative Zahlen ausgeschlossen werden. Die Kunst der Auflösung besteht alsdann arin, die Gleichungen so auszudrücken, daß man leicht übersehen könne, welche Werthe man den unbekannten Größen eben müsse, damit sie den Bedingungen der Aufgabe Genüge eisten. Sehr oft sind alsdann diese Werthe in gewisse Gränzen ingeschlossen; aus der Gleichung muß sich also die Beschaffenheit dieser Gränzen leicht ergeben.

Die Art des Verfahrens wird sich am Besten in Beispielen eigen.

§. 83.

Aufgabe.

Zwei ganze und positive Zahlen zu finden, deren Summe = 8 sei.

Durch die Bedingung, daß die Zahlen ganze und positive in sollen, wird die Aufgabe, welche sonst eine unendliche Zahl on möglichen Fällen zuließe, sehr beschränkt, und da man auch oraus setzen kann, daß die eine Zahl nicht = 0 sein soll, so kann die andere auch nicht = 8 genommen werden. Setzen wir die eine Zahl = x, die andere = y, so ist $x + y = 8$, also $x = 8 - y$. Ist nun

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$

so ist $y = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,$

und da es ganz einerlei ist, welche Zahl man x oder y nennen will, so reduziren sich diese sieben möglichen Fälle nur auf vier. Die eine Zahl ist entweder 1 oder 2, oder 3 oder 4, und dann ist die andere 7 oder 6, oder 5 oder 4.

Wäre die Summe = 9 gewesen, so hätten sich auch bloß vier Fälle ergeben. Ist nämlich

$x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$

so ist $y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Also ist die eine Zahl entweder 1 oder 2, oder 3 oder 4, und alsdann die andere entweder 8 oder 7, oder 6 oder 5. Man sieht leicht, daß daraus im Allgemeinen sich folgern läßt: Die Zahl der Fälle ist halb so groß als die gegebene Summe, wenn diese eine gerade Zahl ist und halb so groß als diese Summe

weniger 1, wenn dieſelbe eine ungerade Zahl iſt. Bezeichnet n jede gerade und $2n+1$ jede ungerade Zahl, ſo iſt die Zahl der möglichen Fälle für die erſte Summe $= \frac{2n}{2} = n$ und für die zweite $= \frac{2n+1-1}{2} = \frac{2n}{2} = n$.

§. 84.

Aufgabe.

Man ſoll 60 in zwei Theile theilen, ſo daß der erſte Theil ſich durch 4, der andere aber durch 3 theilen laſſe.

Es ſei, wenn man den einen Theil durch 4 dividirt, der Quotient $= x$, ſo iſt dieſer Theil ſelbſt $= 4x$, und gibt man dem andern Theil, durch 3 dividirt, zum Quotienten y, ſo iſt derſelbe $= 3y$. Nun hat alſo die Gleichung

$$4x + 3y = 60,$$

alſo $$4x = 60 - 3y,$$

und $$x = \frac{60-3y}{4}.$$

Es muß alſo, wenn x nicht negativ oder $= 0$ werden ſoll, nothwendig $3y$ kleiner als 60, folglich y kleiner als 20 ſein. Dividirt man wirklich mit dem Nenner 4 in den Zähler, ſo kommt $x = 15 - \frac{3}{4}y$. Da nun die Theile ganze Zahlen ſein ſollen, ſo muß $3y$ durch 4 theilbar ſein; man kann daher für y nur die Zahlen 4, 8, 12, 16 ſetzen, weil y kleiner als 20 ſein muß. Hieraus ergeben ſich vier Auflöſungen.

Iſt	$y = 4$	8	12	16
ſo iſt	$x = 12$	9	6	3
und die Theile ſind	12 und 48	24 und 36	36 und 24	48 und 12

Die beiden letzten Werthe der Theile ſind mit den beiden erſten einerlei, alſo läßt die Aufgabe nur zwei Auflöſungen zu. Der eine Theil iſt 12 oder 24 und der andere Theil 48 oder 36.

§. 85.

Dieſe Aufgabe läßt ſich auch allgemein ſo faſſen: Eine Zahl m werde in zwei Theile getheilt, ſo daß der eine Theil durch a, der andere durch b dividirt wird. Unter welchen Bedingungen bekommt man ganze und bejahte Zahlen?

Wenn die Theile, durch a und b dividirt, x und y zu Quotienten geben, ſo ſind die Theile ſelbſt ax und by, und es iſt die Gleichung $ax + by = m$.

Daraus folgt $$x = \frac{m-by}{a}.$$

Soll dieser Werth von x bejahet werden, wenn m, b und bejahet sind, so muß by $<$ m oder y $<$ $\frac{m}{b}$ sein.

Damit nun aber auch keine Brüche kommen, unterscheide an folgende Fälle. Entweder haben m, b, a ein gemeinhaftliches Maaß oder nicht. Im erstern Falle dividire man e durch das gemeinschaftliche Maaß, bis sie Primzahlen unter ch werden. Jetzt sind nun

1) $\frac{m}{a}$ und $\frac{b}{a}$ beide ächte Brüche, oder

2) $\frac{m}{a}$ allein, und $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl, oder

3) $\frac{b}{a}$ allein, und $\frac{m}{a}$ eine ganze Zahl.

Für den Fall 3) wollen wir $\frac{m}{a} = q$ setzen; es ist also $= q - \frac{by}{a}$. Soll also x eine ganze Zahl werden, so muß in y aufgehen oder y ein Vielfaches von a sein, weil $\frac{b}{a}$ ein ächter Bruch ist.

Für den Fall 2) ist $\frac{b}{a}$ eine ganze Zahl, die wir $= r$ setzen wollen, also $x = \frac{m}{a} - ry$. Da nun y auch eine ganze Zahl und $\frac{m}{a}$ ein ächter Bruch sein soll, so kann x in keinem Falle eine ganze Zahl sein.

Der Fall 1) läßt sich so entwickeln:

Es sei in der Gleichung $x = \frac{m - by}{a}$ die Zahl $b > a$. Ist dies nicht der Fall, so kann man die Gleichung $ax + by = m$ in diese $y = \frac{m - ax}{b}$ verwandeln, welche mit der vorigen einerlei Form hat. Es ist also immer möglich, den negativen Theil des Zählers so zu nehmen, daß der Faktor, womit die unbekannte Größe multiplizirt ist, größer als der Divisor sei.

Ist daher $b > a$, so ist $\frac{b}{a}$ ein uneigentlicher Bruch. Man kann also b durch a dividiren; es komme in ganzen Zahlen der Quotient c und zum Rest bleibe d, so ist $\frac{b}{a} = c + \frac{d}{a}$.

In dem Bruche $\frac{d}{a}$ ist $a > d$, also kann man a durch d dividiren; der Quotient $\frac{a}{d}$ sei $= c' + \frac{d'}{d}$. So kann man

immer weiter fortfahren und die Größen c, c', c'' u. s. w. werden die jedesmal herausgekommenen ganzen Zahlen; d, d', d'' u. s. w. aber die gebliebenen Reste bezeichnen. Die fortgesetzte Division geht entweder endlich auf oder man kommt zuletzt auf einen Rest $= 1$, je nachdem $\frac{b}{a}$ ein reducibler oder irreducibler Bruch ist. Es ist daher $\frac{d}{d'}$ entweder $= c''$ oder $= c'' + \frac{1}{d'}$.

Nun war $x = \frac{m-by}{a} = \frac{m}{a} - \frac{by}{a}$ und $\frac{b}{a} = c + \frac{d}{a}$,

also
$$x = \frac{m}{a} - yc - \frac{dy}{a}$$
$$= \frac{m}{a} - \frac{dy}{a} - cy$$
$$= \frac{m-dy}{a} - cy.$$

Ferner sei $\frac{m-dy}{a} = x'$, und da jetzt d kleiner ist, als a, so bilde man daraus eine Gleichung für y. Es ist nämlich

$$m - dy = ax',$$
also
$$m - ax' = dy,$$
folglich
$$\frac{m-ax'}{d} = y,$$
oder
$$\frac{m}{d} - \frac{ax'}{d} = y.$$

Nun war $\frac{a}{d} = c' + \frac{d'}{d}$, also

$$\frac{ax'}{d} = c'x' + \frac{d'x'}{d},$$
folglich
$$y = \frac{m}{d} - c'x' - \frac{d'x'}{d},$$
$$= \frac{m}{d} - \frac{d'x'}{d} - c'x'$$
$$= \frac{m-d'x'}{d} - c'x'.$$

Nun sei wieder $\frac{m-d'x'}{d} = x''$, und da jetzt d' kleiner ist, als d, so bilde man daraus wieder eine Gleichung für x'. Es ist nämlich

$$m - d'x' = dx'',$$
also
$$m - dx'' = d'x'$$
und
$$\frac{m-dx''}{d'} = x'.$$

Geht nun die Division $\frac{d}{d'}$ auf, ist also $\frac{d}{d'} = c''$, so ist, da $x' = \frac{m}{d'} - \frac{dx''}{d'}$ ist,

$$x' = \frac{m}{d'} - c''x''.$$

Geht aber die Division nicht auf und kommt zuletzt ein Rest $= 1$, ist also $\frac{d}{d'} = c'' + \frac{1}{d'}$, so ist

$$\begin{aligned} x' &= \frac{m}{d'} - \frac{dx''}{d'} \\ &= \frac{m}{d'} - c''x'' - \frac{x''}{d'} \\ &= \frac{m}{d'} - \frac{x''}{d'} - c''x'' \\ &= \frac{m - x''}{d'} - c''x''. \end{aligned}$$

Setzt man nun $\frac{m - x''}{d'} = x'''$, und nimmt man für x''' und x'' beliebige ganze Zahlen an, so werden auch x' so wie x und y ganze Zahlen, wie erhellet, wenn man rückwärts substituirt. Es ist nämlich

$$x' = x''' - c''x'',$$

ferner

$$\begin{aligned} y &= x'' - c'x' \\ &= x'' - c'x''' + c' \cdot c'' \cdot x'' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x &= x' - cy \\ &= x' - cx'' + c \cdot c' \cdot x''' - c \cdot c' \cdot c'' \cdot x'', \end{aligned}$$

also alles in ganzen Zahlen ohne Bruch.

§. 86.

Folgende Beispiele mögen diese Aufgabe erläutern.

1) Ein Kaufmann will für 800 thlr. zweierlei Sorten Tuch kaufen. Von der einen Sorte kostet die Elle $2\frac{2}{3}$ thlr., von der andern 3 thlr., wie viel kann er von jeder Sorte erhalten?

Kauft er von der ersten Sorte x, von der andern y Ellen, so muß er für die erste Partie $2\frac{2}{3} \cdot x = \frac{8}{3}x$ thlr., für die andere $3y$ thlr. zahlen, und der Betrag muß zusammen $= 800$ thlr. sein. Man hat also die Gleichung $\frac{8}{3}x + 3y = 800$, oder $8x + 9y = 2400$, folglich

$$8x = 2400 - 9y$$

und

$$\begin{aligned} x &= \frac{2400 - 9y}{8} \\ &= \frac{2400}{8} - \frac{9y}{8}. \end{aligned}$$

Es findet also der dritte Fall Statt, denn $m = 2400$, $a = 8$ und $\frac{m}{a} = \frac{2400}{8}$ eine ganze Zahl $= 300$, aber $\frac{9y}{8}$ ein Bruch. Es ist daher $x = 300 - \frac{9y}{8}$ und soll nun $\frac{9y}{8}$ eine ganze Zahl Ellen geben, so muß man y so wählen, daß es ein Vielfaches von 8 ist. Damit aber auch nicht negatives komme, so muß $\frac{9}{8}y$ kleiner als 300, oder 9y kleiner als 2400, d. h. y kleiner als 266 sein. Es ist daher 264 der größte und 8 der kleinste Werth von y. Die Zwischenwerthe bilden mit diesen eine arithmetische Progression, deren Differenz $= 8$ ist. Also erhält man die Reihe

$y = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64,$
folglich $x = 291, 282, 273, 264, 255, 246, 237, 228.$

$y = 72, 80, 88, 96, 104, 112, 120,$
folglich $x = 219, 210, 201, 192, 183, 174, 165.$

$y = 128, 136, 144, 152, 160, 168, 176,$
folglich $x = 156, 147, 138, 129, 120, 111, 102.$

$y = 184, 192, 200, 208, 216, 224, 232,$
folglich $x = 93, 84, 75, 66, 57, 48, 39.$

$y = 240, 248, 256, 264,$
folglich $x = 30, 21, 12, 3.$

Es finden also 33 verschiedene Fälle Statt. Bei jedem kommt die Summe von 800 thlr. heraus, wenn man die Ellen bei dem Werthe von y zu 3 thlr. und bei dem Werthe von x zu $2\frac{3}{4}$ thlr. rechnet. Die Werthe von y bilden eine steigende, die von y eine fallende arithmetische Progression, deren erstes Glied $= 291$, das letzte $= 3$ und die Differenz $= -9$ ist. Die Summen aller Ellen zusammen bilden auch eine fallende arithmetische Reihe, deren erstes Glied 299, das letzte 267 und die Differenz $= -1$ ist.

2) In einer Festung kostet die Unterhaltung der Besatzung täglich 100 thlr. Sie besteht aus Infanterie und Kavallerie. Ein Kavallerist kostet täglich 7 gr., ein Infanterist aber 3 gr. 3 pf., wie stark ist die Anzahl der Reiter und des Fußvolks?

Ist die Menge des Fußvolks $= x$ und die der Reiter $= y$, so kostet die erstere täglich $3\frac{1}{4}x$ gr. oder $\frac{13}{96}x$ thlr. und die letztern 7y gr. oder $\frac{7}{24}y$ thlr., also hat man die Gleichung

$$\frac{7}{24}y + \frac{13}{96}x = 100,$$

oder

$$28y + 13x = 9600,$$

aher $13x = 9600 - 28y$

nd $x = \frac{9600 - 28y}{13}$.

Es ist der erste Fall; der Divisor geht in keinem Theile es Zählers auf.

Ferner ist $28 > 13$, also kann man mit 13 hinein ividiren. Dann kommt

$$x = \frac{9600}{13} - 2y - \frac{2y}{13}$$
$$= \frac{9600 - 2y}{13} - 2y.$$

Nun sei $\frac{9600 - 2y}{13} = x'$, so ist

$$9600 - 2y = 13x',$$

lso $9600 - 13x' = 2y$

nd $\frac{9600 - 13x'}{2} = y.$

Daher $y = 4800 - \frac{13}{2}x'.$

Jetzt gehört der Fall wieder unter Nr. 3. Es muß x' ine Zahl sein, die durch 2 theilbar ist, und $13x'$ darf nicht rößer sein, als 9600, weil y nicht negativ kommen darf. s ist daher x' höchstens $= 738$, wenigstens $= 2$, also y enigstens $= 4800 - 4797 = 3$ und höchstens $= 4787$. s soll aber auch x eine positive Zahl sein, also darf $28y$ icht größer sein, als 9600, folglich y nicht größer als 342, oraus folgt, daß der kleinste Werth von $x' = 686$ sei. Man kann also für x' alle ganze bejahte und gerade Zahlen on 686 bis 738 schreiben. Dies gibt eine Reihe, deren erstes lied $= 686$, das letzte 738, die Differenz $= 2$ ist. Die nzahl der Glieder, d. h. der möglichen Fälle, ist daher $= 27$.

Ist nun $x' = 686, 688, 690 \ldots\ldots 736, 738,$

o ist $y = 341, 328, 315 \ldots\ldots 16, 3,$

nd $x = 4, 32, 60 \ldots\ldots 704, 732.$

Die Werthe von x' geben also eine steigende Reihe, deren rstes Glied $= 686$, das letzte $= 738$, die Differenz $= 2$ ist.

Die Werthe von y geben eine fallende Reihe, deren erstes lied $= 341$, das letzte $= 3$, die Differenz $= -13$ ist; ie Werthe von x wieder eine steigende Reihe, deren erstes lied $= 4$, das letze $= 732$, die Differenz $= 28$ ist.

In allen Fällen werden die täglichen Unterhaltungskosten on 100 thlr. herauskommen. Ist z. B. die Zahl der Infan-

reiſten = 4, ſo koſten dieſe täglich 13 gr., die zweyfache Zahl 341 der Kavalleriſten aber koſten 238 gr., alſo zuſammen 2400 gr. oder 100 thlr. Beträgt das Fußvolk 700 und die Kavallerie 3 Mann, ſo koſten erſtere täglich 2379 gr. und letztere 21 gr., alſo zuſammen wieder 2400 gr. = 100 thlr.

Die Zahl der geſammten Mannſchaft bildet die Reihe 345, 360, 375 . . . . . 705, 720, 735, in welcher die Differenz = 15 iſt.

Findet etwa noch die Bedingung Statt, daß die Garniſon aus einer größeren Menge Fußvolk als Kavallerie beſtehe, daß aber doch erſtere nicht über 4 mal ſtärker ſey, als letztere, ſo reduziren ſich die 21 Fälle in folgende 9.

Es iſt $y = 224, 211, 198, 185, 172, 159, 146, 133, 120,$
und $x = 256, 284, 312, 340, 368, 396, 424, 452, 480.$

3) Aus 5 löthigem, 8 löthigem und 16 löthigem Silber ſoll 12 löthiges gemacht werden, wie viel muß von jeder Sorte zu 1 Mark genommen werden?

Man ſetze, es werden von dem 5 löthigen x Lothe, von 8 löthigen y Lothe, vom 16 löthigen z Lothe zu einer Mark genommen, ſo iſt

$$1)\quad x + y + z = 16 \text{ Loth},$$

daher
$$x = 16 - y - z.$$

$$2)\quad 5x + 8y + 16z = 12(x + y + z),$$

alſo
$$5x + 8y + 16z = 12x + 12y + 12z.$$

Hebt man, was ſich heben läßt, ſo kommt

$$4z = 7x + 4y,$$

folglich
$$4z - 4y = 7x$$

und
$$\frac{4z - 4y}{7} = x.$$

Beide Werthe für x gleich geſetzt, erhält man

$$\frac{4z - 4y}{7} = 16 - y - z,$$

oder
$$4z - 4y = 112 - 7y - 7z,$$

folglich
$$112 = 3y + 11z,$$

daher
$$112 - 11z = 3y$$

und
$$\frac{112 - 11z}{3} = y.$$

Es ſind alſo nun die beiden unbekannten Größen z und y zu beſtimmen und da der Diviſor 3 weder in 112 noch in 11 aufgeht, ſo werden beide nach dem Verfahren des obigen 1ſten Falles beſtimmt.

Man dividire also mit 3 in 112, so kommt

$$y = \frac{112}{3} - 3z - \frac{2z}{3}$$

$$= \frac{112 - 2z}{3} - 3z.$$

Setzt man nun $\frac{112 - 2z}{3} = x'$, so ist

$$112 - 2z = 3x'$$

also $$112 - 3x' = 2z,$$

folglich $$\frac{112 - 3x'}{2} = z.$$

Dividirt man wieder mit 2 in $3x'$, so kommt

$$\frac{112}{2} - x' - \frac{x'}{2},$$

oder $$\frac{112 - x'}{2} - x'.$$

Man setze $\frac{112 - x'}{2} = x''$, so ist

$$112 - x' = 2x'',$$

also $$112 - 2x'' = x'.$$

Schreibt man diesen Werth für x' in die obige Gleichung für z, so kommt

$$\frac{112 - 3 \cdot 112 + 6x''}{2} = z,$$

oder $$56 - 3 \cdot 56 + 3x'' = z,$$

oder $$-112 + 3x'' = z,$$

oder $$3x'' - 112 = z.$$

Nun war $y = \frac{112 - 11z}{3}$.

Setzt man also statt z den gefundenen Werth, so kommt

$$y = \frac{112 - 33x'' + 1232}{3}$$

$$= \frac{1344 - 33x''}{3}$$

$$= 448 - 11x''.$$

Endlich war $x = 16 - y - z$.

Für y und z die Werthe gesetzt, kommt

$$x = 16 - (448 - 11x'') - (3x'' - 112)$$

$$= 16 - 448 + 11x'' - 3x'' + 112$$

$$= 16 - 336 + 8x''$$

$$= 8x'' - 320.$$

Nun ſuche man die Gränzen zu beſtimmen, zwiſchen welche x'' fallen muß. Es muß aber

1) $y + z < 16$ ſein,

alſo $448 - 11x'' + 3x'' - 112 < 16$,
oder $336 - 8x'' < 16$,
alſo $336 < 16 + 8x''$,
folglich $336 - 16 < 8x''$,

und wenn man durchgängig mit 8 dividirt

$42 - 2 < x''$,
daher $40 < x''$,
oder $x'' > 40$.

2) $x + z < 16$,

alſo $8x'' - 320 + 3x'' - 112 < 16$,
oder $11x'' - 432 < 16$,
folglich $11x'' < 16 + 432$,
oder $11x'' < 448$
daher $x'' < 40\frac{8}{11}$.

Es muß alſo x'' zwiſchen 40 und $40\frac{8}{11}$ fallen, und es gibt ſo viel mögliche Fälle, als man Bruchzahlen zwiſchen 40 und $40\frac{8}{11}$ annehmen kann, d. h. unzählig viele. Wollen wir uns aber auf Brüche beſchränken, die den Nenner 11 haben, ſo gibt es ſieben Fälle, indem man x'' entweder $= 40\frac{1}{11}$ oder $40\frac{2}{11}$ oder $40\frac{3}{11}$ oder $40\frac{4}{11}$ oder $40\frac{5}{11}$ oder $40\frac{6}{11}$ oder $40\frac{7}{11}$ ſetzen kann. Die Rechnung gibt für dieſe Werthe

$x = \frac{8}{11}, 1\frac{5}{11}, 2\frac{2}{11}, 2\frac{10}{11}, 3\frac{7}{11}, 4\frac{4}{11}, 5\frac{1}{11}$,
$y = 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$
$z = 8\frac{3}{11}, 8\frac{6}{11}, 8\frac{9}{11}, 9\frac{1}{11}, 9\frac{4}{11}, 9\frac{7}{11}, 9\frac{10}{11}$.

Wollte man x'' bloß $= 40$ nehmen, ſo würde $x = 0$, und ſetzt man es $= 40\frac{8}{11}$, ſo wird $y = 0$. Auch daraus ſieht man, daß 40 und $40\frac{8}{11}$ die richtigen Gränzen ſind.

§. 87.

Zur Übung mögen noch folgende Aufgaben dienen:

1) Zwei Schäfer haben zuſammen eine Heerde von 225 Stück. Wenn ich meine Schaafe, ſagt der erſte zum andern, zu 9 überzähle, ſo bleiben 3 übrig. Und bei mir, ſagt der andere, nur 1, wenn ich ſie zu 8 überzähle. Wie viel hat jeder gehabt?

Wenn die Zahl des ersten, durch 9 dividirt, 3 übrig läßt
ıd der herausgekommene Quotient $= x$ ist, so ist seine Heerde
$= 9x+3$. Eben so findet man die Heerde des andern $= 8y+1$,
so hat man die Gleichung

$$9x+3+8y+1 = 225,$$

gr
$$9x+8y+4 = 225,$$

lglich
$$9x+8y = 221$$

ıd
$$8y = 221-9x,$$

so
$$y = \frac{221-9x}{8},$$

$$= \frac{221}{8} - \frac{9x}{8}$$

$$= \frac{221}{8} - x - \frac{x}{8}$$

$$= \frac{221-x}{8} - x.$$

Man setze $\frac{221-x}{8} = x'$, so kommt

$$221 - x = 8x'$$

so
$$221 - 8x' = x.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung für y, so kommt

$$y = \frac{221-1989+72x'}{8}$$

$$= \frac{-1768+72x'}{8}$$

$$= 9x' - 221.$$

Soll also y nicht $= 0$ oder negativ werden und bloß aus
anzen bestehen, so muß $9x' > 221$ oder $x' > 25$ sein.

Ferner war $x = 221 - 8x'$. Soll also x nicht negativ
der $= 0$ und auch kein Bruch werden, so muß $8x' < 221$,
lso $x' < 28$ sein. Es ist daher x' entweder $= 26$ oder
$= 27$. Daraus folgt

$$y = 105 \text{ und } x = 120,$$

der
$$y = 177 \quad x = 48.$$

Der eine hatte also entweder 120 oder 48 und der andere
ntweder 105 oder 177 Schaafe.

2) Eine Gesellschaft von Männern und Frauen verzehrt
ısammen 15 thlr. 8 gr. = 368 gr.; ein Mann bezahlt 18 gr.,
ine Frau 13 gr.: wie viel waren es Männer und Weiber?

Setzt man die Zahl der Männer $= x$, der Frauen $= y$,
o bezahlen die erstern $18x$ gr., die letztern $13y$ gr., also hat
nan die Gleichung

$$18x + 13y = 368,$$

folglich $$13y = 368 - 18x,$$

daher $$y = \frac{368 - 18x}{13}$$

$$= \frac{368}{13} - x - \frac{5x}{13}$$

$$= \frac{368 - 5x}{13} - x.$$

Man setze $\frac{368 - 5x}{13} = x'$, so kommt

$$368 - 5x = 13x',$$

daher $$368 - 13x' = 5x,$$

also $$\frac{368 - 13x'}{5} = x,$$

oder $$\frac{368}{5} - 2x' - \frac{3}{5}x' = x,$$

oder $$\frac{368 - 3x'}{5} - 2x' = x.$$

Man setze $\frac{368 - 3x'}{5} = x''$, so kommt

$$368 - 3x' = 5x'',$$

oder $$368 - 5x'' = 3x',$$

also $$\frac{368 - 5x''}{3} = x',$$

oder $$\frac{368}{3} - x'' - \frac{2}{3}x'' = x',$$

oder $$\frac{368 - 2x''}{3} - x'' = x'.$$

Setzt man wieder $\frac{368 - 2x''}{3} = x'''$, so kommt

$$368 - 2x'' = 3x''',$$

also $$368 - 3x''' = 2x'',$$

daher $$\frac{368 - 3x'''}{2} = x'',$$

oder $$\frac{368}{2} - x''' - \frac{1}{2}x''' = x'',$$

oder $$\frac{368 - x'''}{2} - x''' = x''.$$

Setzt man nun $\frac{368 - x'''}{2} = x''''$, so kommt

$$368 - x''' = 2x'''',$$

oder $$368 - 2x'''' = x'''.$$

Man kann also für x'''' jede ganze Zahl setzen, deren Doppeltes 368 nicht übersteigt. Es fällt daher x'''' zwischen 1 und 183.

Aber $x'' = \frac{368 - 3x'''}{2}$,

der $2x'' = 368 - 3x'''$
$= 368 - 1104 + 6x''''$
$= +736 + 6x''''$
$= 6x'''' - 736$,

olglich. $x'' = 3x'''' - 368$,

lso x'''' nicht kleiner als 123.

Ferner $368 - 5x'' = 3x'$,

lso $3x' = 368 - 15x'''' + 1840$
$= 2208 - 15x''''$,

olglich $x' = 736 - 5x''''$,

lso x'''' nicht größer als 147. Es fällt daher x'''' zwischen 23 und 147.

Ferner war $x = \frac{368 - 13x'}{5}$
$= \frac{368 - 9568 + 65x''''}{5}$
$= \frac{-9200 + 65x''''}{5}$
$= 13x'''' - 1840$.

Es darf daher $13x''''$ nicht kleiner als 1840, also x'''' nicht kleiner als 142 sein.

Endlich $y = \frac{368 - 18x}{13}$
$= \frac{368 - 234x'''' + 33120}{13}$
$= \frac{33488 - 234x''''}{13}$
$= 2576 - 18x''''$.

Es darf daher $18x''''$ nicht größer als 2576, also x'''' nicht größer als 143 sein. Folglich hat x'''' nur zwei Werthe, entweder $= 142$ oder $= 143$. Dies gibt folgende Werthe für für x und y.

Ist $x'''' = 142$, so ist
$x = 13x'''' - 1840 = 1846 - 1840 = 6$
und $y = 2576 - 18x'''' = 2576 - 2556 = 20$.

Es waren also 6 Männer und 20 Weiber. Die Weiber verzehrten 20. 13 gr. = 260 gr., und die Männer 6. 18 gr. = 108 gr., also zusammen 368 gr.

Ist $x'''' = 143$, so ist
$x = 13x'''' - 1840 = 1859 - 1840 = 19$
und $y = 2576 - 18x'''' = 2576 - 2574 = 2$.

Es waren alſo 19 Männer und 2 Frauen. Die erſtern verzehrten 19 · 18 gr. = 342 gr. und die letztern 2 · 13 gr. = 26 gr., alſo alle zuſammen 368 gr.

§. 88.

Aufgabe.

Unter welchen Bedingungen iſt die Gleichung $ax - by = n$ in bejahten ganzen Zahlen auflöſsbar?

Aus der Gleichung

$$ax - by = n,$$

folgt

$$ax = by + n,$$

alſo

$$x = \frac{by + n}{a}.$$

Sind daher b, n und a poſitiv, ſo wird auch x poſitiv, man mag für y eine poſitive Zahl ſchreiben, welche man will.

Um nun aber auch für x und y ganze Zahlen zu finden, muſs man die Gleichung eben ſo behandeln, wie in §. 85. die Gleichung $ax + by = m$.

Iſt nämlich $x = \frac{by+n}{a} = \frac{by}{a} + \frac{n}{a}$, ſo ſind wieder drei Fälle möglich. Es ſind entweder $\frac{b}{a}$ und $\frac{n}{a}$ beide irreductible Brüche, oder es iſt $\frac{b}{a}$ allein, oder $\frac{n}{a}$ allein ein ſolcher. Iſt es $\frac{b}{a}$ allein, ſo muſs y ſo beſchaffen ſein, daſs a darin aufgeht, wenn x eine ganze Zahl werden ſoll; iſt es $\frac{n}{a}$ allein, ſo wird x nur eine ganze Zahl und der Fall, wo $\frac{b}{a}$ und $\frac{n}{a}$ beide Brüche ſind, wird auf dieſelbe Art entwickelt, wie es oben geſchehen iſt. Wir wenden uns daher gleich zu hieher gehörigen Beiſpielen.

1) Man ſucht eine Zahl, welche durch 6 dividirt, 2 übrig laſſe, und durch 13 dividirt, 3 zum Reſt gebe.

Es ſei N eine ſolche Zahl. Durch 6 dividirt, möge x, und durch 13 dividirt, y herauskommen, ſo iſt im erſten Falle $N = 6x + 2$ und im zweiten $N = 13y + 3$, folglich iſt $6x + 2 = 13y + 3$, oder $6x - 13y = 3 - 2 = 1$. Es iſt daher

$$6x = 13y + 1$$

und

$$x = \frac{13y + 1}{6}$$

$$= 2y + \frac{y+1}{6}.$$

Man setze $\frac{y+1}{6} = x'$, so ist

$$y + 1 = 6x',$$

so $$y = 6x' - 1.$$

Schreibt man diesen Werth von y in die Gleichung für x, kommt

$$x = \frac{13 \cdot 6x' - 13 + 1}{6}$$

$$= 13x' - 2 - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6}$$

$$= 13x' - 2.$$

Es ist also $N = 6x + 2$

$$= 6 \cdot 13x' - 2 \cdot 6 + 2$$

$$= 78x' - 10,$$

nd man kann für x' jede beliebige ganze Zahl schreiben, um e Aufgabe ein Genüge zu leisten. Ist also

$x' = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ u. s. w.

ist $N = 68, 146, 224, 302, 380, 458$ u. s. w.

2) Man sucht eine Zahl, welche durch 39 dividirt, 16, nd durch 56 dividirt, 27 zum Rest gebe.

Es ist also $N = 39x + 16$ und N auch $= 56y + 27$.

lso $$39x + 16 = 56y + 27,$$

glich $$39x = 56y + 11,$$

lso $$x = \frac{56y + 11}{39}$$

$$= y + \frac{17y + 11}{39}.$$

Setzt man nun $\frac{17y + 11}{39} = x'$, so kommt

$$17y + 11 = 39x',$$

lso $$17y = 39x' - 11.$$

nd $$y = \frac{39x' - 11}{17}$$

$$= 2x' + \frac{5x' - 11}{17}.$$

Es sei $\frac{5x' - 11}{17} = x''$, so erhält man

$$5x' - 11 = 17x'',$$

lso $$5x' = 17x'' + 11$$

nd $$x' = \frac{17x'' + 11}{5}$$

$$= 3x'' + \frac{2x'' + 11}{5}.$$

Setzt man wieder $\frac{2x''+11}{5} = x'''$, ſo kommt

$$2x''+11 = 5x''',$$

alſo $$2x'' = 5x''' - 11$$

und $$x'' = \frac{5x'''-11}{2}$$

$$= 2x''' + \frac{x'''-11}{2}.$$

Setzt man endlich $\frac{x'''-11}{2} = x''''$, ſo iſt

$$x''' - 11 = 2x'''',$$

alſo $$x''' = 2x'''' + 11,$$

und man kann nun x'''' nach Belieben annehmen, ſelbſt negativ, nur daß $2x''''$ nicht größer als 11 werde, wenn x und y poſitiv kommen ſollen.

Die Reduktion rückwärts iſt folgende:

Iſt $x''' = 2x'''' + 11$, ſo iſt

$$x'' = 2x''' + \frac{x'''-11}{2} = 4x'''' + 22 + \frac{2x''''+11-11}{2}$$

$$= 4x'''' + 22 + x''''$$

$$= 5x'''' + 22.$$

Ferner iſt

$$x' = 3x'' + \frac{2x''+11}{5} = 15x'''' + 66 + \frac{10x''''+44+11}{5}$$

$$= 15x'''' + 66 + 2x'''' + 11$$

$$= 17x'''' + 77.$$

Ferner

$$y = 2x' + \frac{5x'-11}{17} = 34x'''' + 154 + \frac{85x''''+385+11}{17}$$

$$= 34x'''' + 154 + 5x'''' + 22$$

$$= 39x'''' + 176.$$

Endlich

$$x = y + \frac{17y+11}{39} = 39x'''' + 176 + \frac{17.39x''''+2992+11}{39}$$

$$= 39x'''' + 176 + 17x'''' + 77$$

$$= 56x'''' + 253.$$

Alſo $$N = 39x + 16 = 39 \cdot 56x'''' + 39 \cdot 253 + 16$$

$$= 2184x'''' + 9883.$$

Um die kleinſte Zahl für N zu finden, ſetze man $x'''' = -4$,

ſo iſt $$2184x'''' = -8736,$$

alſo $$N = 9883 - 8736 = 1147.$$

Die nächſte Zahl findet ſich, wenn man $x'''' = -3$ ſetzt.

Dann iſt $$N = -6552 + 9883 = 3331.$$

Für $x'''' = -2$ iſt $N = -4368 + 9883 = 5515$ etc.

Es ist aber der Unterschied zwischen 1147 und 3331 = 2184 nd der Unterschied zwischen 3331 und 5515 auch = 2184. Die Zahlen also, bei welchen das Verlangte Statt findet, bilden ine arithmetische Progression, deren erstes Glied = 1147, die Differenz = 2184 ist. Es ist demnach für

$x''' = -4, -3, -2, -1, 0, +1$ u. s. w.
$N = 1147, 3331, 5515, 7699, 9883, 12067$ u. s. w.

3) Von einer aus Männern und Frauen bestehenden Gesellschaft verzehrt ein Mann 20 gr., eine Frau 14 gr., und es findet sich, daß die Weiber zusammen 2 gr. mehr verzehrt haben, als die Männer: wie viel Männer und Weiber waren es?

Es sei die Zahl der Männer = x, der Weiber = y, so haben die erstern verzehrt 20x, die letztern 14y, und vermöge der Angabe ist $14y = 20x + 2$,

also
$$y = \frac{20x+2}{14}$$
$$= x + \frac{6x+2}{14}.$$

Ist nun $\frac{6x+2}{14} = x'$, so ist

$$6x + 2 = 14x'$$
also
$$6x = 14x' - 2$$
und
$$x = \frac{14x'-2}{6}$$
$$= 2x' + \frac{2x'-2}{6}$$
$$= 2x' + \frac{x'-1}{3}.$$

Ist wieder $\frac{x'-1}{3} = x''$, so ist

$$x' - 1 = 3x'',$$
also
$$x' = 3x'' + 1.$$

Man kann jetzt statt x'' jede beliebige ganze positive Zahl, selbst 0 setzen. Ist nämlich $x' = 3x'' + 1$, so ist

$$x = 2x' + \frac{x'-1}{3} = 6x'' + 2 + \frac{3x''+1-1}{3}$$
$$= 6x'' + 2 + x''$$
$$= 7x'' + 2.$$

$$y = x + \frac{6x+2}{14} = 7x'' + 2 + \frac{42x''+12+2}{14}$$
$$= 7x'' + 2 + 3x'' + 1$$
$$= 10x'' + 3.$$

Es ſey $x'' = 0$, ſo iſt
$x = 7.0 + 2 = 2$,
$y = 10.0 + 3 = 3$.
Es ſey $x'' = 1$, ſo iſt
$x = 7.1 + 2 = 9$,
$y = 10.1 + 3 = 13$.
Es ſey $x'' = 2$, ſo iſt
$x = 7.2 + 2 = 16$,
$y = 10.2 + 3 = 23$.

Es bilden alſo die Werthe für x eine Reihe, deren erſtes Glied = 2 und die Differenz = 7, und die Werthe für y eine Reihe, deren erſtes Glied = 3 und die Differenz = 10 iſt. Wenn alſo

$x'' = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ u. ſ. w.,
ſo iſt $x = 2, 9, 16, 23, 30, 37, 44$ u. ſ. w.,
und $y = 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63$ u. ſ. w.

Hätte man in dieſem Beiſpiele den Überſchuß der Zehnzahl koſten = 1 gr. geſetzt, ſo wäre $x' = 3x'' + \frac{1}{2}$ gekommen. Dann wäre x oder y auch eine ganze Zahl und ein Beruf gefunden worden, welches doch nach der Natur der Angabe nicht ſein darf. Iſt nämlich $x' = 3x'' + \frac{1}{2}$, ſo iſt

$$x = 2x' + \frac{2x' - x}{6} = 6x'' + 1 + \frac{6x'' + 1 - x}{6},$$
$$= 6x'' + 1 + x''$$
$$= 7x'' + 1,$$
und $y = 7x'' + 1 + \frac{42x'' + 6 + 1}{14}$
$$= 7x'' + 1 + 3x'' + \frac{1}{2}$$
$$= 10x'' + 1\frac{1}{2}.$$

Die Urſache liegt darin, daß in der Gleichung $14y = 20x +$ die Zahlen 14 und 20 das gemeinſchaftliche Maaß 2 haben, die beigefügte Zahl 1 aber ſich nicht durch dieſes Maaß theilen läßt. Sollen daher Aufgaben dieſer Art nicht unmöglich werden, ſo dürfen die Faktoren 14 und 20 kein gemeinſchaftliches Maaß haben, oder wenn ſie eins haben, ſo muß dieſes auch das Maaß der an x gehängten dritten Größe ſein. Beobachtet man dies, ſo erhält man allemal richtige Auflöſungen.

4) Zu finden, wie viel Geldſtücke jemand bei ſich habe, vorausgeſetzt, daß die Summe der Geldſtücke eine gewiſſe Zahl nicht überſchreite.

Wir wollen die Auflösung allgemein geben. Es habe also mand x Geldstücke bei sich, so lasse man ihn die Summe der- ben nach einander durch a, b, c dividiren und die Reste sagen. en bei der ersten Division mit a gebliebenen Rest p multiplizire an mit bc und a — 1, den bei der zweiten Division mit b blebenen multiplizire man ac und den bei der dritten Division it c gebliebenen mit ab. Ist nun die Zahl der Geldstücke ht größer als das Produkt abc, so findet man dieselbe, wenn an jene Produkte aus den Resten zusammen addirt und die umme durch abc dividirt; der Rest zeigt die verlangte Zahl Geldstücke an.

Es habe jemand x Geldstücke. Die Division mit a gebe n Quotienten n und den Rest p, die Division mit b den uotienten m und den Rest q, die Division mit c den Quo- nten l und den Rest r, so ist

$$1)\quad x = an + p,$$

so $$x - p = an \quad \text{und} \quad \frac{x-p}{a} = n.$$

$$2)\quad x = bm + q,$$

so $$x - q = bm \quad \text{und} \quad \frac{x-q}{b} = m.$$

$$3)\quad x = cl + r,$$

so $$x - r = cl \quad \text{und} \quad \frac{x-r}{c} = l.$$

Folglich ist

$$n - (m + l) = \frac{x-p}{a} - \left(\frac{x-q}{b} + \frac{x-r}{c}\right).$$

Bringt man die Brüche unter einerlei Nenner und ver- chtet die Subtraktion, so kommt

$$n - (m + l) = \frac{bcx - bcp - acx + acq - abx + abr}{abc}.$$

Es sei $n - (m + l) = z$, so ist

$$z = \frac{x(bc - (ac + ab) + acq + abr - bcp}{abc}.$$

Hat man nun die Zahlen a, b, c so gewählt, daß die- umme der Produkte ac + ab um 1 größer als bc, so ist

$$bc - (ac + ab) = -1,$$

so $$z = \frac{-x + acq + abr - bcp}{abc},$$

nglich $$abcz = -x + acq + abr - bcp$$

nd $$abcz + x = acq + abr - bcp.$$

Addirt man nun die Produkte aus den beiden letzten Rest acq + abr zusammen und zieht davon das Produkt aus dem ersten Reste bcp ab, so ist, wenn das Übrigbleibende = Q

$$abcz + x = Q.$$

Dividirt man nun mit abc auf beiden Seiten, so kommt

$$z + \frac{x}{abc} = \frac{Q}{abc},$$

d. h. wenn man Q durch abc dividirt, so kommt zum Quotienten z und x bleibt als Rest übrig; es ist daher dieser Rest die Zahl der Geldstücke.

Da es indessen möglich ist, daß bcp größer als acq + abr wäre, in welchem Falle also Q, folglich auch z und x negativ sein würde, so addire man in der Gleichung für z auf beiden Seiten noch den ersten Rest p, so kommt

$$z + p = \frac{-x + acq + abr - bcp}{abc} + p$$

$$= \frac{-x + acq + abr - bcp + abcp}{abc},$$

und setzt man $z + p = y$, so ist

$$y = \frac{-x + acq + abr + bcp(a-1)}{abc},$$

also $abcy + x = acq + abr + bcp(a-1)$,

folglich $y + \frac{x}{abc} = \frac{S}{abc}$,

wenn $S = acq + abr + bcp(a-1)$ ist.

Dieser Ausdruck ist nun der oben gegebenen Auflösung völlig gemäß.

Damit ab + ac um 1 von bc unterschieden werde, gebe man den Faktoren a, b, c folgende Werthe:

a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. w.
b = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 u. s. w.
c = 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 u. s. w.

Man sieht, daß die Werthe für a, b, c arithmetische Reihen bilden. Bei der Reihe für a ist das erste Glied = 1 und die Differenz auch = 1, bei der Reihe für b das erste Glied auch = 1, die Differenz = 2; bei der Reihe für c das erste Glied = 3 und die Differenz ebenfalls = 2.

Für die Faktoren 1, 1, 3 darf die Summe der Geldstücke nicht über 3, für die Faktoren 2, 3, 5 nicht über 30, für 3, 5, 7 nicht über 105, für 4, 7, 9 nicht über 252, für 5, 9, 11 nicht über 495 u. s. w. betragen. Diese Produkte

den eine Reihe der vierten Ordnung, indem erst die vierten Verschiede beständig werden, wie folgende Übersicht zeigt.

3, 30, 105, 252, 495, 858, 1365, 2040,
27, 75, 147, 243, 363, 507, 675,
48, 72, 96, 120, 144, 168,
24, 24, 24, 24, 24.

Exempel.

Es fragt A den B, wie viel Geld er bei sich habe. Dieser antwortet: Wenn ich die Zahl der Groschen, welche aber kleiner als 252 ist, durch 4 dividire, so bleibt 1, durch 7 auch 1, durch 9 aber 6. Berechne also, wie viel ich habe.

Es ist also $p = 1$, $q = 1$, $r = 6$; ferner $a = 4$, $b = 7$, $c = 9$.

A multiplizirt nun den ersten Rest $p = 1$ mit $bc = 7 \cdot 9$ und dann noch mit $a - 1 = 3$; dies gibt 189.

Den zweiten Rest $q = 1$ multiplizirt A mit $ac = 4 \cdot 9$, kommt 36.

Den dritten Rest $r = 6$ multiplizire A mit $ab = 4 \cdot 7$, kommt 168.

Die Summe dieser drei Produkte ist 393. Darein wird mit $4 \cdot 7 \cdot 9 = 252$ dividirt, so bleibt zum Reste 141. Es hat also B 141 gr. oder 5 thlr. 21 gr. bei sich.

Anstatt die Divisoren 4, 7, 9 zu wählen, hätte man auch die andere Werthe für a, b und c nehmen können, nur nicht solche, deren Produkt kleiner ist, als 141.

Hätte man z. B. 7, 13, 18 gewählt, so wäre der erste Rest $p = 1$, der zweite $q = 11$, der dritte $r = 6$, also

$bcp(a-1) = 13 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 6 = 1170$,
$acq = 7 \cdot 15 \cdot 11 = 1155$,
$abr = 7 \cdot 13 \cdot 6 = 546$,
Summe $= 2871$.

Dividirt man diese Zahl durch 1365, so ist der Quotient $= 2$ und der Rest 141, wie vorher.

§. 89.

In den alten Rechenbüchern heißen Pronikzahlen solche Zahlen, die aus der Addition eines Quadrats zu seiner Wurzel entstehen und diese Wurzel selbst heißt die Pronikwurzel. So ist z. B. $42 = 36 + 6$ eine Pronikzahl und 6 die Pronikwurzel und im Allgemeinen $a^2 + a$ eine Pronikzahl und a die Wurzel.

Man suche eine Zahl, worin 2, 3, 4, 5, 6 aufgehen; sie ist $= 2.2.3.5 = 60$. Es muß also die unbekannte Zahl $x = n.60 + 1$, da sie aber durch 7 aufgeht, zugleich $= m.7$ sein. Daher ist

$$7m = 60n + 1,$$

also

$$m = \frac{60n+1}{7}$$

$$= 8n + \frac{4n+1}{7}.$$

Setzt man nun $\frac{4n+1}{7} = q$, so ist

$$4n + 1 = 7q,$$

also

$$4n = 7q - 1,$$

folglich

$$n = \frac{7q-1}{4}$$

$$= q + \frac{3q-1}{4}.$$

Man setze $\frac{3q-1}{4} = r$, so ist

$$3q - 1 = 4r,$$

also

$$3q = 4r + 1,$$

folglich

$$q = \frac{4r+1}{3}$$

$$= r + \frac{r+1}{3}.$$

Soll nun kein Bruch kommen, so muß $r + 1$ durch 3 aufgehen.

Man setze daher für r alle Zahlen, die um 1 vermehrt, sich durch 3 theilen lassen und berechne daraus die Werthe von q, n, m und x. Ist nun

r =	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,
so ist									
q =	3,	7,	11,	15,	19,	23,	27,	31,	35,
n =	5,	12,	19,	26,	33,	40,	47,	54,	61,
m =	43,	103,	163,	223,	283,	343,	403,	463,	523,
x =	301,	721,	1141,	1561,	1981,	2401,	2821,	3241,	3661.

Alle Werthe für r, q, n, m, x bilden arithmetische Reihen. Die Unterschiede in der Reihe r sind $= 3$, in der Reihe q $=$ in der Reihe n $= 7$, in der Reihe m $= 60$ und in der Reihe x $= 420$. Hat man sich eine Tabelle für die Werthe von x entworfen, so wird die Frage, zwischen welche Gränzen die in den Sinn genommne Zahl falle, bald in den Stand setzen dieselbe zu finden.

§. 91.

Die sogenannte Regula Chi lehrt eigentlich nichts anders, s die Auflösung unbestimmter Aufgaben, nur daß man sich i derselben nicht der Hülfe der Buchstabenrechnung bedient, ndern aus den Zahlen selbst durch Vergleichen und Nachdenken as Verlangte zu finden sucht. Bedingung ist dabei, daß Brüche nd negative Zahlen in der Auflösung nicht vorkommen dürfen, enn die Dinge von der Art sind, daß sie sich unter solchen ormen nicht denken lassen. Das Verfahren mag folgendes eispiel lehren.

Es kauft jemand 100 Stück Vieh für 2100 thlr., den chsen zu 30 thlr., das Schwein zu 9 thlr., das Schaaf zu thlr.; wie viel muß er von jeder Sorte kaufen?

Man schreibe die Preise jedes Stücks vom höchsten bis um kleinsten unter einander; links, mit dem kleinsten Preise einer Linie, setze man die Anzahl aller Stücke, rechts in rselben Linie die ganze Kaufsumme. Nun ziehe man den einsten von den übrigen Preisen ab und setze den Unterschied eben den größern Preis. Dann multiplizire man den kleinsten reis mit der ganzen Anzahl der Dinge, ziehe das Produkt von er ganzen Kaufsumme ab, und was übrig bleibt, suche man o einzutheilen, daß die Theile Produkte aus den Unterschieden nd einem andern Faktor seien. Es muß aber die Summe ieser anderen Faktoren kleiner sein, als die Anzahl aller Dinge. Dann geben diese anderen Faktoren an, wie viel man von den heureren Stücken kaufen könne, und wenn man ihre Summe on der Anzahl aller Dinge abzieht, so zeigt der Rest die Anahl der Dinge vom geringsten Werthe an.

Diesem nach würde die Rechnung des obigen Beispiels so eschehen.

	30	27
	9	6
100	3	2100
		300 = 100.3
		1800

Diese 1800 theile man nun so in zwei Theile, daß der ine ein Vielfaches von 27 und der andere ein Vielfaches von 6 sei, doch so, daß die mit 27 und 6 multiplizirten Zahlen zusammen weniger als 100 ausmachen. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} 1800 &= 27.58 + 6.39 \\ &= 27.60 + 6.30 \\ &= 27.62 + 6.21 \\ &= 27.64 + 6.12 \\ &= 27.66 + 6.3. \end{aligned}$$

Mehr als diese fünf Fälle finden nicht Statt; denn multiplizirt man mit 27 eine Zahl, die kleiner als 58 ist, so wird der Multiplikator von 6 zu groß, so daß er mit dem Multiplikator von 27 zusammen addirt eine größere Zahl als 100 zur Summe gibt. Nimmt man aber den Multiplikator von 27 größer als 66, so bleibt für 6 kein anderer Multiplikator mehr übrig, da das Produkt aus 27 und einer größeren Zahl als 66 schon 1800 übersteigt.

Es sind also gekauft worden:

	1)	58 Ochsen,	39 Schweine,	3 Schaafe,
oder	2)	60 "	30 "	10 "
oder	3)	62 "	21 "	17 "
oder	4)	64 "	12 "	24 "
oder	5)	66 "	3 "	31 "

Daß der Preis aller 100 Stück unter diesen Bedingungen = 2100 thlr. sei, zeigt sich, wenn man die Probe macht. Wir wollen nur die erste hersetzen. Es kostet

1 Ochse	30 thlr.,	also 58 Ochsen	1740 thlr.
1 Schwein	9 thlr.,	" 39 Schweine	351 thlr.
1 Schaaf	3 thlr.,	" 3 Schaafe	9 thlr.
		Summe	2100 thlr.

Eben dies Exempel, algebraisch behandelt, gibt folgende Auflösung. Es sei die Zahl der gekauften Ochsen = x, der Schweine = y, der Schaafe = z, so hat man

$$x + y + z = 100$$

und

$$30x + 9y + 3z = 2100.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$x = 100 - y - z.$$

Diesen Werth setze man in die zweite Gleichung, so kommt

$$3000 - 30y - 30z + 9y + 3z = 2100,$$

oder

$$3000 - 21y - 27z = 2100,$$

also

$$900 - 21y - 27z = 0,$$

oder

$$21y + 27z = 900,$$

folglich

$$21y = 900 - 27z.$$

Alles durch 3 dividirt, kommt

$$7y = 300 - 9z,$$

also

$$y = \frac{300 - 9z}{7}$$

$$= \frac{300}{7} - z - \frac{2z}{7}$$

$$= \frac{300 - 2z}{7} - z.$$

Setzt man $\frac{300-2z}{7} = z'$, so kommt

$300-2z = 7z'$,

also $300-7z' = 2z$,

folglich $\frac{300-7z'}{2} = z$.

Daher $z = \frac{300}{2} - \frac{7z'}{2}$

$= \frac{300}{2} - 3z' - \frac{z'}{2}$

$= \frac{300-z'}{2} - 3z'$.

Setzt man nun $\frac{300-z'}{2} = z''$, so kommt

$300 - z' = 2z''$,

daher $300 - 2z'' = z'$.

Man muß also z'' so annehmen, daß das Doppelte davon kleiner als 300 ist, also z'' kleiner als 150.

Es sei $z'' = 149$, so ist

$z' = 2$,

daher $z = \frac{300-7\cdot 2}{2} = 150 - 7 = 143$,

also $y = \frac{300-9z}{7} = \frac{300-1287}{7}$, folglich negativ.

Es ist daher z zu groß und darf nur so angenommen werden, daß $9z$ kleiner als 300 ist, also nicht größer als 33, und da y in ganzen Zahlen kommen muß, so muß $300-9z$ durch 7 theilbar sein. Nun ist $\frac{300-9z}{7} = \frac{42\cdot 7+6-2z}{7} - z$. Soll also der Zähler durch 7 aufgehen, so muß $6-2z$ durch 7 sich theilen lassen, es ist daher z wenigstens $= 3$, in welchem Falle $6-2z = 0$ werden. Daraus ergibt sich dann der kleinste Werth von $y = 42-3 = 39$.

Die Werthe von z fallen also zwischen 3 und 33, und da $300-9z$ durch 7 theilbar sein muß und $\frac{300-9\cdot 3}{7}$ der größte Werth für y ist, so findet man die anderen Werthe, wenn man zu $z = 3$ so lange noch 7 addirt, bis die Summe nicht über 33 beträgt. Dies gibt also für z die Werthe 3, 10, 17, 24, 31, und folglich für y die Werthe $\frac{300-9\cdot 10}{7} = 30$, $\frac{300-9\cdot 17}{7} = 21$, $\frac{300-9\cdot 24}{7} = 12$ und $\frac{300-9\cdot 31}{7} = 3$. Daher ist denn

$x = 100-y-z = 100-39-3 = 58$

$= 100-30-10 = 60$

$= 100-21-17 = 62$

$= 100-12-24 = 64$

$= 100-3-31 = 66$.

§. 92.

Um bei ſolchen Aufgaben zu beurtheilen, ob ſie möglich ſind, überlege man Folgendes:

Es ſei nach der Form der vorigen Aufgabe

$$x + y + z = a$$

und

$$fx + gy + hz = b,$$

wo alſo a, b, f, g, h gegebene Zahlen bedeuten. Man ſetze unter f, g, h ſei f die größte und h die kleinſte, ſo iſt, weil $x + y + z = a$ auch $fx + fy + fz = fa$, und da offenbar $fx + fy + fz$ größer iſt als $fx + gy + hz$, ſo iſt auch fa größer als b. Ferner iſt $hx + hy + hz = ha$ und kleiner als $fy + gy + hz$, weil h der kleinſte Faktor unter den dreien: f, g und h ſein ſoll, alſo $hx + hy + hz$ kleiner als b, und folglich auch ha kleiner als b. Soll alſo die Aufgabe möglich ſein, ſo muß fa größer und ha kleiner als b ſein. Im vorigen Exempel war $a = 100$, $b = 2100$, $f = 30$, $h = \frac{1}{2}$, alſo $fa = 3000$ und größer als 2100, aber $ha = 300$ und alſo kleiner als 2100. Es darf auch b wegen der anderen Buchſtaben den Gränzen fa und ha nicht einmal ſehr nahe kommen, weil ſich jene ſonſt nicht beſtimmen laſſen.

§. 93.

Es können auch mehr als drei unbekannte Größen vorkommen, in der Art der Auflöſung wird dadurch nichts geändert. Z. B.

Ein Silberarbeiter hat viererlei Silber, 8 löthiges, 11 löthiges, 12 löthiges und 15 löthiges. Daraus will er 30 Mark 14 löthiges machen; wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

Nimmt er von der erſten Sorte w Mark, von der zweiten x Mark, von der dritten y Mark und von der vierten z Mark, ſo iſt

$$w + x + y + z = 30$$

und

$$8w + 11x + 12y + 15z = 14 \cdot 30 = 420.$$

Man multiplizire die erſte Gleichung mit 8 und ſubtrahire ſie dann von der zweiten, ſo kommt

$$\begin{array}{r} 8w + 11x + 12y + 15z = 420, \\ 8w + 8x + 8y + 8z = 240, \\ \hline 3x + 4y + 7z = 180. \end{array}$$

Daraus folgt

$$3x = 180 - 4y - 7z$$

und

$$x = 60 - y - 2z - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}$$

$$= 60 - y - 2z - \frac{y+z}{3}.$$

Es muß also $y+z$, wenn kein Bruch entstehen soll, durch 3 theilbar sein. Man setze also $y+z = 3u$, so wird

$$y = 3u - z.$$

Dann ist $x = 60 - 3u + z - 2z - u$
$= 60 - 4u - z.$

Es war $w+x+y+z = 30$, also

$w = 30 - x - y - z$
$= 30 - 60 + 4u + z - 3u + z - z$
$= -30 + u + z.$

Es muß also u und z so angenommen werden, daß beide zusammen größer sind als 30, und daß z größer ist als $3u$, weil sonst y entweder $= 0$ oder gar negativ wird. Setzt man $u = 7$, so muß z wenigstens $= 24$ sein, aber dann ist $3u$ kleiner als z, also muß u größer als 7 sein. Setzt man $u = 8$, so muß $z = 23$ sein, denn kleiner, kommt $u+z$ nicht größer als 30, und größer, wird $3u - z$ entweder $= 0$ oder negativ. Es ist also $z = 23$, alsdann wird

$$w = -30 + 8 + 23 = 1$$

und $$x = 60 - 4 \cdot 8 - 23 = 5.$$

Die Werthe von w, x, y, z
sind also 1, 5, 1, 23.

Setzt man $u = 9$, so muß z wenigstens $= 22$ sein, dann wird $w = 1$, $x = 2$ und $y = 5$. Setzt man bei diesem Werthe von u die Größe $z = 23$, so wird $w = 2$, $x = 1$, $y = 4$. Wollte man $z = 24$ setzen, so würde $w = 3$, $y = 3$, aber $x = 0$; es kann also z nicht höher als 23 gesetzt werden. Setzt man $u = 10$, so muß z wenigstens $= 21$ sein, dann wird $w = 1$, $y = 9$ und $x = -1$. Es ist also u entweder $= 8$ oder $= 9$ und z entweder $= 22$ oder 23, wenn alles in ganzen Zahlen ohne Brüche kommen soll. Es ergeben sich daher folgende drei Auflösungen:

Ist $u = 8$, so ist

$w = 1,$
$x = 5,$
$y = 1,$
$z = 23.$

Ist $u = 9$, so ist

$w = 1$ oder $= 2,$
$x = 2$ „ $= 1,$
$y = 5$ „ $= 4,$
$z = 22$ „ $= 23.$

Von dem 15 löthigen Silber werden also entweder 22 Mark genommen und alsdann von dem 12 löthigen 5, von dem 11 löthigen 2 und von dem 8 löthigen 2 Mark. Oder man nimmt von dem 15 löthigen 23 Mark und alsdann von dem 12 löthigen 4 oder 1, von dem 11 löthigen 1 oder 5 und von dem 8 löthigen 2 oder 1 Mark.

§. 94.

Es kann auch unbestimmte Aufgaben geben, in welchen die eine unbekannte Größe mit der andern multiplizirt ist oder in einer höheren Potenz sich befindet, während die andere blos in der ersten Potenz steht. Man setzt wieder voraus, daß die unbekannten Größen in ganzen Zahlen kommen sollen. Wir wollen folgende hierher gehörige Aufgabe betrachten.

§. 95.

Aufgabe.

Man sucht zwei Zahlen, deren Produkt zu ihrer Summe addirt, die Zahl 59 gebe.

Sind x und y die beiden Zahlen, so muß sein

$$xy + x + y = 59,$$

also $xy + y = 59 - x,$

oder $y(x+1) = 59 - x,$

also $y = \frac{59-x}{x+1}.$

Dividirt man mit $x+1$ in $-x+59$, so ist der Quotient $= -1 + \frac{60}{x+1}$. Daraus sieht man, daß, wenn y ganzen Zahlen kommen soll, der Nenner $x+1$ in 60 aufgehen muß. Man findet folglich so viel Werthe für x und y als 60 Theiler hat. Diese sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60. Ist also

$x+1 =$	1	2	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60
so ist $x =$	0	1	2	3	4	5	9	11	14	19	29	59
und $y =$	59	29	19	14	11	9	5	4	3	2	1	0

Es gäbe also zwölf Auflösungen, aber da es beliebig ist, welche Zahl man x oder y nennen will und die sechs ersten Fälle mit den sechs letzten übereinstimmen, so gibt es nur sechs verschiedene Auflösungen, und es ist die eine Zahl

0, 1, 2, 3, 4, 5,

und die andere 59, 29, 19, 14, 11, 9.

§. 96.

Um eine allgemeine Regel für alle solche Gleichungen zu finden, wollen wir die obige $xy + x + y = 59$ unter einer allgemeinen Form darzustellen suchen, indem wir für 59 einen Buchstaben setzen und auch die Koefficienten von xy, x, y, welche in obiger Gleichung = 1 sind, durch Buchstaben ausdrücken. Diese allgemeine Form wäre also

$$mxy \mp ax \mp by \mp c = 0,$$

oder $$mxy = \pm ax \pm by \pm c,$$

und um nicht durch die Doppelzeichen zu verwirren, wollen wir noch allgemeiner setzen $mxy = ax + by + c$, weil in jedem besondern Falle sich schon von selbst ergibt, ob die Zahlen a, b, c positiv oder negativ sind. Gegeben sind also die Größen m, a, b, c, und für x und y werden ganze und positive Zahlen gesucht.

Aus der Gleichung $mxy = ax + by + c$ ergibt sich, wenn man y zuerst sucht,

$$mxy - by = ax + c,$$

oder $$y(mx - b) = ax + c,$$

also $$y = \frac{ax + c}{mx - b}.$$

Multiplizirt man auf beiden Seiten mit m, so kann x aus dem Zähler weggeschafft werden, denn man bekommt

$$my = \frac{max + mc}{mx - b}.$$

Dividirt man rechter Hand mit dem Nenner, so bekommt man zum Quotienten $a + \frac{mc + ab}{mx - b}$.

Also $$my = a + \frac{mc + ab}{mx - b}.$$

In dem an a gehängten Bruche besteht der Zähler aus lauter bekannten Größen, und soll y eine ganze Zahl werden, so muß $mx - b$ ein Theiler von $mc + ab$ sein. In diesem Falle muß das Zähler aus zwei Faktoren bestehen, von denen der eine, den wir f nennen wollen, $= mx - b$, der andere, der g heißen mag, der Quotient sein muß, welcher herauskommt, wenn man $mc + ab$ durch $mx - b$ dividirt. Wir können also setzen $mx - b = f$, woraus folgt

$$mx = f + b,$$

folglich $$x = \frac{f + b}{m}.$$

Es muß also f so beschaffen sein, daß, wenn man b dazu addirt, die Summe durch m aufgehe.

Wenn $my = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$ ist, so ist

$$my - a = \frac{mc+ab}{mx-b}.$$

Es ist also $my - a$ der andere Faktor g des Produkts $mc+ab$, wenn der eine Faktor $mx-b$ oder f ist, so daß also $mc+ab$ immer $= (mx-b).(my-a)$ gesetzt werden kann.

Um also in der Formel $mxy = ax+by+c$ ganze Zahlen für x und y zu finden, muß man eine Zahl f suchen, welche mit b addirt, durch m aufgeht. Diese ist dann $= x$, dadurch wird denn auch $y = \frac{ax+c}{mx-b}$ bestimmt.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$8xy = 4x+6y+24,$$

also $8xy - 6y = 4x+24,$

folglich $y(8x-6) = 4x+24,$

und $y = \frac{4x+24}{8x-6}.$

Nun multiplizire man auf beiden Seiten mit 8, so kommt

$$8y = \frac{32x+192}{8x-5}$$

$$= 4 + \frac{192+24}{8x-6}$$

$$= 4 + \frac{216}{8x-6}.$$

Nun suche man solche Faktoren von 216, daß, wenn dazu 6 addirt wird, die Summe durch 8 theilbar sei. Es sind also die Faktoren von $216 = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 108, 216$. Von diesen sind zu unserm Zwecke zu gebrauchen die Faktoren 2 und 18.

Es ist also 1) $f = 2,$

folglich $\frac{f+b}{8} = \frac{2+6}{8} = 1 = x,$ und daher

$$y = \frac{4x+24}{6x-6} = \frac{4+24}{8-6} = 14.$$

2) $f = 18,$

folglich $\frac{f+b}{8} = \frac{18+6}{8} = 3 = x,$ und daher

$$y = \frac{4x+24}{8x-6} = \frac{12+24}{24-6} = 2.$$

§. 97.

§. 97.

Auf ähnliche Art wird auch folgende Gleichung $xy + x^2 = ax + by + c$ aufgelöst, in der die eine unbekannte Größe einer höhern Potenz, als der ersten, vorkommt. Aus der Gleichung ergibt sich zuerst

$$xy - by = -x^2 + ax + c,$$

so

$$y(x-b) = -x^2 + ax + c,$$

folglich

$$y = \frac{-x^2 + ax + c}{x-b}$$

$$= -x + a - b + \frac{c + ab - b^2}{x-b}.$$

Es sei $c + ab - b^2 = q$, so ist

$$y = -x + a - b + \frac{q}{x-b}.$$

Es muß also ebenfalls $x-b$ ein Theiler von q sein und so q aus zwei Faktoren f und g bestehen, der eine $f = x-b$, der g der Quotient, wenn man q durch $x-b$ dividirt. Ist nun die Division geschehen und g gefunden, so ist

$$y = -x + a - b + g,$$

so

$$y + x - a + b = g.$$

Es sei z. B. die Gleichung gegeben

$$xy + x^2 = 4x + 7y + 39,$$

hat man

$$y = -x + 4 - 7 + \frac{39 + 28 - 49}{x-7}$$

$$= -x - 3 + \frac{18}{x-7}.$$

Die Faktoren von 18 sind 1, 2, 3, 6, 9, 18. Ist nun $f = x-b$, so ist $f + b = x$, also kann man nur solche Werthe für x brauchen, die, wenn 7 abgezogen wird, einen der Faktoren von 18 geben und doch auch y nicht negativ machen. Offenbar muß man x größer als 7 setzen, weil sonst -7 negativ wird, und folglich auch y verneint kommt.

Ist nun $x = 8$, so ist

$$x - 7 = 1 \text{ und } \frac{18}{x-7} = 18,$$

so

$$y = -8 - 3 + 18 = 7.$$

Ist $x = 9$, so ist

$$x - 7 = 2 \text{ und } \frac{18}{x-7} = 9,$$

also

$$y = -9 - 3 + 9 = -3,$$

folglich dieser Werth nicht zu brauchen.

Dasselbe ist der Fall, wenn man für x noch größere Wer[illegible] setzt. Es ist also nur Eine Auflösung der Aufgabe in ganzen und positiven Zahlen möglich, nämlich $x = 5$ und $y =$ [illegible]

§. 52.

Schwieriger sind die Fälle, wo man angeben soll, [illegible] eine Gleichung von der Form $cx^2 + bx + a$ ein vollkommenes Quadrat werde, so daß eine rationale Wurzel sich aus [illegible] selben ziehe lasse. Der einfachste Fall ist hier der, wo [illegible] Koeffizient $c = 1$, $b = 0$ und $a = 1$ ist, denn dadurch wird obige Formel in $x^2 + 1$ verwandelt, und es ist also [illegible] Frage, wie man x annehmen müsse, damit die Summe [illegible] $x^2 + 1$ wieder ein Quadrat werde.

In ganzen Zahlen ist diese Foderung nicht möglich, [illegible] es gibt kein Quadrat, welches mit 1 summirt wieder ein [illegible] kommenes Quadrat gebe, ausgenommen, wenn man $x =$ [illegible] setzt, denn dann ist $0^2 + 1$ allerdings ein Quadrat, [illegible] $= 1$. Durch Brüche ist aber die Aufgabe lösbar.

Da $1 + x^2$ ein vollkommenes Quadrat sein soll, so [illegible]

man	$\sqrt{(1 + x^2)}$	$=$	$x + p$,
dann ist	$1 + x^2$	$=$	$x^2 + 2px + p^2$,
also	1	$=$	$2px + p^2$,
folglich	$1 - p^2$	$=$	$2px$,
daher	$\frac{1 - p^2}{2p}$	$=$	x.

In dieser Formel kann man allerdings für p jede beli[illegible] positive Zahl annehmen; ist aber diese größer als 1, so [illegible] der Zähler negativ, also auch der Quotient, und daher x [illegible] falls negativ. Will man also für x eine positive Zahl [illegible] so darf man für p keine ganze positive Zahl setzen, [illegible] nur Brüche. Dagegen lassen sich alle negative Zahlen [illegible] setzen, denn das Quadrat derselben wird auch positiv, also [illegible] der Zähler $1 - p^2$ verneint, und da der Nenner $2p$ auch [illegible] neint ist, so wird der Quotient x positiv. Es sei z. B. $p =$ [illegible] so ist $p^2 = +9$, also $\frac{1 - p^2}{2p} = \frac{1-9}{-2 \cdot 3} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} =$ [illegible] und jetzt ist wirklich $x^2 + 1 = \frac{16}{9} + 1 = \frac{16+9}{9} = \frac{25}{9}$ [illegible] Quadrat und die Wurzel davon $= \frac{5}{3}$. Soll aber p auch [illegible] sitiv sein, so kann man dafür nur eigentliche Brüche [illegible]

Es sei also $p = \frac{r}{q}$, so ist

$$\frac{1-p^2}{2p} = \frac{1-\frac{r^2}{q^2}}{\frac{2r}{q}} = \frac{\frac{q^2-r^2}{q^2}}{\frac{2r}{q}} = \frac{q^2-r^2}{q^2} \cdot \frac{q}{2r} = \frac{q^2-r^2}{2rq} = x.$$

Für q und r lassen sich nun alle mögliche ganze Zahlen annehmen, nur daß r kleiner als q sein muß, und daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Ist $x = \frac{q^2-r^2}{2qr}$, so ist

$$x^2 = \frac{q^4-2q^2r^2+r^4}{4q^2r^2},$$

also

$$1+x^2 = 1+\frac{q^4-2q^2r^2+r^4}{4q^2r^2} = \frac{4q^2r^2+q^4-2q^2r^2+r^4}{4q^2r^2} = \frac{q^4+2q^2r^2+r^4}{4q^2r^2}.$$

Dieser Bruch ist wirklich ein Quadrat und die Wurzel daraus oder $\sqrt{(1+x^2)} = \frac{q^2+r^2}{2qr}$.

Ist	$r =$	1	1	2	1	3	1	2	3	4 u. s. w.
und	$q =$	2	3	3	4	4	5	5	5	5
so ist	$x =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{0}{40}$

Ist $1+\frac{(q^2-r^2)^2}{(2qr)^2} = \frac{(q^2+r^2)^2}{(2qr)^2}$, und multiplizirt man diese Gleichung mit $(2qr)^2$, so kommt

$$(2qr)^2+(q^2-r^2)^2 = (q^2+r^2)^2.$$

Setzen wir nun $2qr = a$, $q^2-r^2 = b$ und $q^2+r^2 = c$, so haben wir $a^2+b^2 = c^2$, d. h. wir haben zwei Quadrate gefunden, deren Summe wieder ein Quadrat ist. Um also zwei solche Quadrate zu finden, darf man nur $a = 2qr$ und $b = q^2-r^2$ setzen, so wird $c = q^2+r^2$. Es sei z. B. $q = 3$, $r = 2$, so ist $a = 12$ und $b = 5$, also $c = 13$, und es ist wirklich $12^2+5^2 = 13^2$, nämlich $144+25 = 169$.

Eben so, wenn $(2qr)^2+(q^2-r^2)^2 = (q^2+r^2)^2$ ist, so ist $(q^2-r^2) = (q^2+r^2)^2-(2qr)^2$, und setzt man wieder $q^2-r^2 = b$, $q^2+r^2 = c$ und $2qr = a$, so ist $b^2 = c^2-a^2$, und also haben wir auch die Bedingung gefunden, unter der

die Differenz zweier Quadrate wieder ein Quadrat iſt. Es ſei z. B. $q = 5$, $r = 4$, ſo iſt $a = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$, $b = 25 - 16 = 9$ und $c = 25 + 16 = 41$, alſo

$$9^2 = 41^2 - 40^2,$$

wie man ſich leicht durch die Rechnung überzeugen kann.

§. 99.

Es läßt ſich aber die Aufgabe $1 + x^2$ zu einem vollſtändigen Quadrate zu machen, auch auf andere Art löſen.

Man ſetze $\sqrt{(1 + x^2)} = 1 + \frac{rx}{q}$, ſo iſt

$$1 + x^2 = \left(1 + \frac{rx}{q}\right)^2 = 1 + \frac{2rx}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2}.$$

Auf beiden Seiten 1 abgezogen, kommt

$$x^2 = \frac{2rx}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2}.$$

Die Gleichung durch x dividirt, erhält man

$$x = \frac{2r}{q} + \frac{r^2x}{q^2}.$$

Unter einerlei Nenner gebracht, kommt

$$q^2x = 2rq + r^2x,$$

alſo $q^2x - r^2x = 2rq$,

folglich $x(q^2 - r^2) = 2rq$,

daher $x = \frac{2rq}{q^2 - r^2}$.

Es iſt daher

$$x^2 = \frac{(2rq)^2}{(q^2 - r^2)^2}$$

und

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &= 1 + \frac{(2rq)^2}{(q^2 - r^2)^2} \\ &= 1 + \frac{4r^2q^2}{q^4 - 2q^2r^2 + r^4} \\ &= \frac{q^4 - 2q^2r^2 + r^4 + 4r^2q^2}{q^4 - 2q^2r^2 + r^4} \\ &= \frac{q^4 + 2r^2q^2 + r^4}{q^4 - 2q^2r^2 + r^4} \\ &= \frac{(q^2 + r^2)^2}{(q^2 - r^2)^2}. \end{aligned}$$

Es iſt alſo $1 + \frac{(2rq)^2}{(q^2 - r^2)^2} = \frac{(q^2 + r^2)^2}{(q^2 - r^2)^2}$, und daraus folgt wieder, wie oben,

$$(q^2 - r^2)^2 + (2rq)^2 = (q^2 + r^2)^2.$$

§. 100.

Diese Erläuterungen werden uns dienen, um zu finden, wie angenommen werden müsse, wenn die Formel cx^2+bx+a ein Quadrat werden soll. Es lassen sich dabei zuvörderst zwei Fälle unterscheiden: 1) wann die Zahl c und 2) wann die Zahl a ein Quadrat ist.

Es sei also c ein Quadrat, z. B. $= m^2$, so wird die Formel sich in diese verwandeln

$$m^2x^2+bx+a.$$

Soll dies ein Quadrat sein, so muß die Wurzel aus einem Theile mx und aus noch einem Theile bestehen, den wir mit $\frac{r}{q}$ bezeichnen wollen. Es ist also

$$\sqrt{(m^2x^2+bx+a)} = mx+\frac{r}{q},$$

ist, wenn man auf beiden Seiten zum Quadrate erhebt,

$$m^2x^2+bx+a = m^2x^2+\frac{2mxr}{q}+\frac{r^2}{q^2}.$$

Da sich m^2x^2 auf beiden Seiten hebt, so wird

$$bx+a = \frac{2mxr}{q}+\frac{r^2}{q^2},$$

also $q^2bx+q^2a = 2mqxr+r^2$,

folglich $q^2bx-2mqxr = r^2-q^2a$,

oder $x(q^2b-2mqr) = r^2-q^2a$,

daher $x = \frac{r^2-q^2a}{q^2b-2mqr}$.

Setzt man diesen Werth von x in den Ausdruck $mx+\frac{r}{q}$, so erhält man

$$\sqrt{(m^2x^2+bx+a)} = \frac{mr^2-maq^2}{q^2b-2mqr}+\frac{r}{q}$$
$$= \frac{mr^2-maq^2+rqb-2mr^2}{q^2b-2mqr}$$
$$= \frac{rqb-maq^2-mr^2}{q^2b-2mqr}.$$

Setzt man den Werth von $x = \frac{r^2-aq^2}{q^2b-2mqr} = \frac{p}{s}$, so daß $p = r^2-aq^2$ und $s = q^2b-2mqr$ ist, also $x = \frac{p}{s}$ und $x^2 = \frac{p^2}{s^2}$ ist, so wird die Formel m^2x^2+bx+a in die verwandelt $\frac{m^2p^2}{s^2}+\frac{bp}{s}+a$, und multiplizirt man durchgängig mit s^2, so erhält man $m^2p^2+bps+as^2$ und diese Formel ist immer ein Quadrat, wenn man $p = r^2-aq^2$

und $s = q^2b - 2mqr$ setzt. Die Buchstaben q und r kann man willkührlich nehmen, so daß es eine unendliche Menge von Fällen gibt, wo jene Formel ein Quadrat wird.

Es sei z. B. die Formel gegeben: $9x^2 + 5x + 7$, in welcher $m = 3$, $b = 5$ und $a = 7$ ist, so wird diese ein Quadrat, wenn man für q und r irgend einen beliebigen Werth annimmt. Ist z. B. $q = 1$, $r = 2$, so ist

$$p = r^2 - aq^2$$
$$= 4 - 7 \cdot 1 = -3$$

und

$$s = q^2b - 2mqr$$
$$= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2$$
$$= 5 - 12 = -7,$$

also wird $9x^2 + 5x + 7$ verwandelt in

$$9 \cdot 9 + 5 \cdot -3 \cdot -7 + 7 \cdot 49 = 81 + 105 + 343 = 529,$$

welche Zahl das Quadrat von 23 ist.

Oder es sei $q = 3$, $r = 5$, so ist

$$p = 25 - 7 \cdot 9$$
$$= 25 - 63 = -38$$

und

$$s = 9 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$
$$= 45 - 90 = -45,$$

also hat man

$$9 \cdot 38^2 + 5 \cdot -38 \cdot -45 + 7 \cdot (-45)^2$$
$$= 9 \cdot 1444 + 5 \cdot 1710 + 7 \cdot 2025$$
$$= 12996 + 8550 + 14175 = 35721,$$

welche Zahl das Quadrat von 189 ist.

Im zweiten Falle ist a ein Quadrat, also $= f^2$. Dann heißt die Formel $cx^2 + bx + f^2$, oder $f^2 + bx + cx^2$. Soll diese ein Quadrat sein, so ist die Wurzel $= f$ und noch ein Theil, den wir $= \frac{rx}{q}$ setzen wollen, weil die unbekannte Größe x darin vorkommen muß. Also ist

$$\sqrt{(f^2 + bx + cx^2)} = f + \frac{rx}{q}.$$

Auf beiden Seiten zum Quadrate erhoben, kommt

$$f^2 + bx + cx^2 = f^2 + \frac{2frx}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2}.$$

Hier hebt sich auf beiden Seiten f^2, und es ist

$$bx + cx^2 = \frac{2frx}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2},$$

welche Gleichung sich durch x dividiren läßt.

Dadurch erhält man

$$b + cx = \frac{2fr}{q} + \frac{r^2x}{q^2}.$$

Auf einerlei Nenner gebracht, kommt

$$q^2b + q^2cx = 2qfr + r^2x,$$

also $q^2cx - r^2x = 2qfr - q^2b,$

oder $x(q^2c - r^2) = 2qfr - q^2b,$

folglich $x = \frac{2qfr - q^2b}{q^2c - r^2}.$

Setzt man nun in der Formel $f + \frac{rx}{q}$ diesen Werth für x, so bekommt man

$$\sqrt{(f^2 + bx + cx^2)} = f + \frac{2fr^2 - rqb}{q^2c - r^2},$$

$$= \frac{q^2cf - r^2f + 2fr^2 - rqb}{q^2c - r^2}$$

$$= \frac{q^2cf + fr^2 - rqb}{q^2c - r^2}.$$

Setzt man wieder, wie oben, den Werth von

$$x = \frac{2qfr - q^2b}{q^2c - r^2} = \frac{p}{s},$$

also $p = 2qfr - q^2b$

und $s = q^2c - r^2,$

so wird die Gleichung $f^2 + bx + cx^2$ in die verwandelt

$$f^2 + \frac{bp}{s} + \frac{cp^2}{s^2} = s^2f^2 + bps + cp^2,$$

welche allemal ein Quadrat ist, wenn p und s auf die angezeigte Art bestimmt werden. Für r und q kann man wieder jede beliebige Zahl setzen.

Es sei z. B. die Gleichung gegeben $49 + 8x + 5x^2$, wo $a = 49$, also $f = 7$, $b = 8$ und $c = 5$ ist. Nimmt man nun $r = 3$, $q = 4$, so wird

$$p = 2.4.7.3 - 16.8$$

$$= 168 - 128 = 40$$

und $s = 16.5 - 9 = 71,$

also bekommt man

$$71^2.49 + 8.40.71 + 5.40^2 = 247009 + 22720 + 8000$$

$$= 277729,$$

und diese Zahl ist das Quadrat von 527.

§. 101.

Außer den angeführten zwei Fällen kann auch noch in andern die Formel $cx^2 + bx + a$ ein Quadrat werden. Einer dieser Fälle ist der, wenn weder c noch a ein Quadrat ist. Alsdann kann dieselbe ein Quadrat werden, wenn sich $cx^2 + bx + a$

in zwei Faktoren zertheilen läßt. Um die Bedingung, unter der dies möglich ist, zu finden, setze man $cx^2 + bx + a = 0$, so wird

$$cx^2 + bx = -a,$$

also

$$x^2 + \frac{b}{c}x = -\frac{a}{c},$$

und nach der Regel für die Auflösung quadratischer Gleichungen bekommt man

$$x = \frac{-\frac{b}{c} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{c^2} - \frac{4a}{c}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{b}{c} \mp \sqrt{\left(\frac{b^2 - 4ac}{c^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{b}{c} \mp \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{c}}{2}$$

$$= \frac{-b \mp \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2c}.$$

Ist also $b^2 - 4ac$ ein Quadrat, so hat die Gleichung $cx^2 + bx + a$ eine rationale Quadratwurzel. Setzt man $b^2 - 4ac = d^2$, so ist

$$\sqrt{(b^2 - 4ac)} = d,$$

und also

$$x = \frac{-b \mp d}{2c},$$

also

$$1)\ x = \frac{-b + d}{2c},$$

$$2)\ x = \frac{-b - d}{2c}.$$

Die beiden Faktoren also, aus welchen die Gleichung $cx^2 + bx + a$ entstanden ist, sind $x + \frac{b+d}{2c}$ und $x + \frac{b-d}{2c}$. Beide mit einander multiplizirt, geben nämlich

$$x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2}.$$

Nun ist $d^2 = b^2 - 4ac$, also

$$-\frac{d^2}{4c^2} = -\frac{b^2}{4c^2} + \frac{4ac}{4c^2},$$

folglich

$$x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{d^2}{4c^2} = x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{b^2}{4c^2} - \frac{b^2}{4c^2} + \frac{4ac}{4c^2}$$

$$= x^2 + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}.$$

Multiplizirt man nun diese Gleichung mit c, so kommt die gegebene cx^2+bx+a. Von den beiden Faktoren der Gleichung wird man daher nur den einen mit c zu multipliziren brauchen, um durch seine Multiplikation mit dem andern die Gleichung zum Produkte zu erhalten. Es ist daher

$$cx^2+bx+a = c\left(x+\frac{b+d}{2c}\right)\cdot\left(x+\frac{b-d}{2c}\right)$$
$$= \left(cx+\frac{b+d}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{b-d}{2c}\right).$$

Sobald also die Formel cx^2+bx+a durch ein Produkt von der Form $(f+gx)\cdot(h+kx)$ dargestellt werden kann, läßt sich dieselbe zu einem vollkommnen Quadrate machen. Man setze $\sqrt{(cx^2+bx+a)} = \sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)} = \frac{m}{n}(f+gx)$, so ist $(f+gx)\cdot(h+kx) = \frac{m^2}{n^2}(f+gx)^2$,

und dividirt man auf beiden Seiten mit $f+gx$, so kommt

$$h+kx = \frac{m^2}{n^2}(f+gx),$$

also $hn^2+n^2kx = m^2f+m^2gx$,

folglich $n^2kx-gm^2x = m^2f-hn^2$,

oder $x(n^2k-m^2g) = m^2f-hn^2$,

daher $x = \frac{m^2f-hn^2}{n^2k-m^2g}$.

Ist nun z. B. die Gleichung gegeben, $8x^2+16x+6$, so ist $a=6$, $b=16$, $c=8$, also $b^2-4ac = 16^2-4.6.8 = 256-192 = 64$. Da nun also b^2-4ac ein Quadrat wird, so kann die Formel als ein Produkt aus zwei Faktoren dargestellt werden. Hat man nun durch Versuche gefunden, daß diese Faktoren $2+4x$ und $3+2x$ sind, so ist

$$8x^2+16x+16 = (2+4x)\cdot(3+2x),$$

also $\sqrt{(8x^2+16x+16)} = \sqrt{(2+4x)\cdot(3+2x)}$.

Es ist daher $f=2$, $g=4$, $h=3$, $k=2$, folglich

$$x = \frac{2m^2-3n^2}{2n^2-4m^2} = \frac{3n^2-2m^2}{4m^2-2n^2},$$

wenn man Zähler und Nenner mit -1 multiplizirt.

Soll nun x positiv werden, so muß $3n^2$ größer als $2m^2$ und $4m^2$ größer als $2n^2$ sein.

Es müssen also die Brüche $\frac{3n^2}{2m^2}$ und $\frac{4m^2}{2n^2}$ größer als 1 sein und dies geschieht, wenn $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner ist, als $\frac{3}{2}$ und größer als $\frac{2}{4}$ oder größer als $\frac{1}{2}$. Daher muß man für m und n solche Zahlen wählen, daß $\frac{m^2}{n^2}$ kleiner ist, als $\frac{3}{2}$ und doch größer, als $\frac{1}{2}$.

Setzt man z. B. $m = 3$, $n = 4$, so ist $\frac{m^2}{n^2} = \frac{9}{16}$ und dies ist größer als $\frac{1}{2}$ und kleiner als $\frac{3}{4}$. Es ist daher $x = \frac{3n^2 - 2m^2}{4m^2 - 2n^2} = \frac{3 \cdot 16 - 2 \cdot 9}{4 \cdot 9 - 2 \cdot 16} = \frac{48 - 18}{36 - 32} = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$. Dann wird die Gleichung

$$8x^2 + 16x + 6 = 8 \cdot \frac{225}{4} + 16 \cdot \frac{15}{2} + 6 = 450 + 120 + 6 = 576,$$

und diese Zahl ist das Quadrat von 24.

§. 102.

Es kann aber auch der Fall sein, daß $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, daß aber die Formel $cx^2 + bx + a$ sich in zwei Theile theilen läßt, von denen der erste ein Quadrat ist und also $= p^2$ gesetzt werden kann, der andere aber aus zwei Faktoren q und r besteht, so daß $cx^2 + bx + a = p^2 + qr$ ist. Alsdann setze man $\sqrt{(p^2 + qr)} = p + \frac{mq}{n}$, so ist

$$p^2 + qr = p^2 + \frac{2pmq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}.$$

Da sich auf beiden Seiten p^2 hebt, so kommt

$$qr = \frac{2pmq}{n} + \frac{m^2q^2}{n^2}.$$

Dividirt man mit q, so erhält man

$$r = \frac{2pm}{n} + \frac{m^2q}{n^2},$$

also $$n^2r = 2pmn + m^2q.$$

Es versteht sich, daß die Buchstaben p, q, r Formeln von der Art, wie $f + gx$ bedeuten. Wir wollen daher gleich an Beispielen zeigen, wie sich x in diesem Falle bestimmen läßt.

1) Man sucht Zahlen, deren dreifaches Quadrat um 2 größer ist, als ein anderes Quadrat.

Ist x eine solche Zahl, so soll also $3x^2 - 2$ einem andern Quadrat gleich, d. h. $3x^2 - 2$ soll selbst ein Quadrat sein.

Es ist in dieser Formel $c = 3$, $b = 0$, $a = -2$ und weder c noch a ein Quadrat, auch die Gleichung nicht in zwei Faktoren auflösbar, weil $b^2 - 4ac = 0 - (-24) = 24$ kein Quadrat ist. Dagegen läßt sich diese Formel darstellen durch $x^2 + (2x^2 - 2)$ und der letztere Theil ist ein Produkt aus $2x + 2$ und $x - 1$, folglich

$$3x^2 - 2 = x^2 + (2x + 2) \cdot (x - 1).$$

Setzt man jetzt

$$\sqrt{[x^2+(2x+2).(x-1)]} = x+\frac{m(x+1)}{n},$$

so wird

$$x^2+(2x+2).(x-1) = x^2+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{m^2(x+1)^2}{n^2},$$

folglich

$$(2x+2).(x-1) = \frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{m^2(x+1)^2}{n^2}.$$

Dividirt man alle Glieder durch $x+1$, so kommt

$$2(x-1) = \frac{2mx}{n}+\frac{m^2(x+1)}{n^2},$$

folglich, auf einerlei Nenner gebracht,

$$2n^2(x-1) = 2mnx+m^2(x+1),$$

oder $2n^2x-2n^2 = 2mnx+m^2x+m^2$,

daher $2n^2x-2mnx-m^2x = m^2+2n^2$,

folglich $x(2n^2-2mn-m^2) = m^2+2n^2$,

also $$x = \frac{m^2+2n^2}{2n^2-2mn-m^2}.$$

Da in der aufzulösenden Formel $3x^2-2$ die unbekannte Größe x nur im Quadrate vorkommt, so ist es auch einerlei, ob x negativ oder positiv komme, weil das Quadrat in beiden Fällen doch positiv ist. Anstatt m und n lassen sich also alle beliebige positive und negative Zahlen setzen, um so mehr, wenn man für x keine ganze Zahl verlangt, sondern auch mit Brüchen sich begnügt.

Ist z. B. $m = 1$ und $n = 1$, so ist

$$x = \frac{1+2}{2-2-1} = \frac{3}{-1} = -3,$$

und es ist in der That $3.9-2 = 25$, also ein Quadrat.

Ist $m = 2$, $n = 1$, so ist

$$x = \frac{4+2}{2-4-4} = \frac{6}{-6} = -1,$$

und es ist wieder $3.(-1)^2-2 = 1$, also ein Quadrat.

Ist $m = 2$, $n = 3$, so ist

$$x = \frac{4+18}{18-12-4} = \frac{22}{2} = 11,$$

und es ist $3.11^2-2 = 361 = 19^2$.

2) Man sucht Zahlen, deren dreifaches Quadrat zum sechsfachen der Wurzel addirt, um 8 größer ist, als ein anderes Quadrat.

Es soll also $3x^2+6x-8$ ein Quadrat sein. Da weder 3, noch 8, auch $6^2-4.3.8$ kein Quadrat ist, so gehört die Formel unter den gegenwärtigen Fall. Es ist aber

$$3x^2+6x-8 = x^2+2x^2+6x-8$$

und $2x^2+6x-8 = (2x+8).(x-1)$,

also $3x^2+6x-8 = x^2+(2x+8).(x-1)$.

Daher sei

$$\sqrt{[x^2+(2x+8).(x-1)]} = x+\frac{m(x-1)}{n},$$

also

$$x^2+(2x+8).(x-1) = x^2+\frac{2mx(x-1)}{n}+\frac{m^2(x-1)^2}{n^2},$$

folglich

$$(2x+8).(x-1) = \frac{2mx(x-1)}{n}+\frac{m^2(x-1)^2}{n^2}.$$

Mit $x-1$ dividirt, kommt

$$2x+8 = \frac{2mx}{n}+\frac{m^2(x-1)}{n^2},$$

und auf einerlei Nenner gebracht,

$$\begin{aligned}
2n^2x+16n^2 &= 2mnx+m^2(x-1),\\
\text{oder}\quad 2n^2x+16n^2 &= 2mnx+m^2x-m^2,\\
\text{also}\quad 2n^2x-2mnx-m^2x &= -m^2-16n^2,\\
\text{oder}\quad x(2n^2-2mn-m^2) &= -m^2-16n^2,\\
\text{oder}\quad x(2mn+m^2-2n^2) &= m^2+16n^2,\\
\text{also}\quad x &= \frac{m^2+16n^2}{2mn+m^2-2n^2}.
\end{aligned}$$

Es sei $m = 1$ und $n = 1$, so ist

$$x = \frac{1+16}{2+1-2} = 17,$$

und es ist $3.17^2+6.17-8 = 961 = 31^2$.

§. 103.

Es ist aber auch möglich, daß die Formel cx^2+bx+a von der Art sein kann, daß man nicht sogleich findet, wie sich dieselbe in solche Theile zerfällen lasse, deren einer ein Quadrat und der andere ein Produkt aus zwei Faktoren ist. Von der Formel z. B. $7x^2+19x+13$ sind die Theile $(1+2x+x^2)$ und $6x^2+17x+12$. Der erstere ist $=(1+x)^2$, und der zweite besteht aus den Faktoren $(3+2x).(4+3x)$. Es ist aber schwer, diese Zergliederung zu errathen. In einem solchen Falle nun, wo man die Zergliederung nicht finden kann, suche man einen Fall zu errathen, in welchem die Formel cx^2+bx+a ein Quadrat wird, indem man nach und nach für x kleine positive oder negative Zahlen setzt, und da es leicht möglich ist, daß x keine ganze Zahl, auch dafür Brüche probirt. Wäre z. B. $x = \frac{r}{s}$, so wäre

$$cx^2+bx+a = \frac{cr^2}{s^2}+\frac{br}{s}+a,$$

und Alles mit s^2 multiplizirt, käme $cr^2+bsr+as^2$. Kann man also für r und s Zahlen finden, welche diese Formel zu

nem Quadrate machen, so hat man auch Werthe für x gefunden, welche cx^2+bx+a zu einem Quadrate machen.

Ist z. B. die Formel gegeben $8x^2+4$, welche offenbar ein Quadrat wird, wenn man $x=2$ setzt, und worin $c=8$, $b=0$ und $a=4$ ist, so nehme man $x=2+y$, so wird $x^2=4+4y+y^2$ und $8x^2+4$ wird sein

$$8y^2+32y+32+4=8y^2+32y+36.$$

In dieser Formel ist 36 ein Quadrat; es ist also der zweite Fall, und man kann $\sqrt{(8y^2+32y+36)}=6+\frac{my}{n}$ setzen, alsdann wird

$$8y^2+32y+36=36+\frac{12my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2},$$

folglich $8y^2+32y=\frac{12my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$.

Durch y dividirt, kommt

$$8y+32=\frac{12m}{n}+\frac{m^2y}{n^2},$$

und auf einerlei Nenner gebracht

$$8n^2y+32n^2=12nm+m^2y,$$

$$8n^2y-m^2y=12nm-32n^2,$$

$$y(8n^2-m^2)=12nm-32n^2,$$

folglich $y=\frac{12nm-32n^2}{8n^2-m^2}=\frac{4(3nm-8n^2)}{8n^2-m^2}$.

Da nun $x=2+y$ war, so ist

$$x=2+\frac{4(3nm-8n^2)}{8n^2-m^2}=\frac{16n^2-2m^2+12nm-32n^2}{8n^2-m^2}=\frac{12nm-2m^2-16n^2}{8n^2-m^2},$$

in welcher Formel man für m und n alle beliebige Werthe setzen kann.

Es sei $m=3$, $n=2$, so ist

$$x=\frac{72-18-64}{32-9}=\frac{-10}{23}=-\frac{10}{23}.$$

Dann ist $8x^2+4=8\cdot\frac{100}{529}+4=\frac{800}{529}+4=\frac{100+2116}{529}=\frac{2916}{529}=(\frac{54}{23})^2$.

Es sei die Formel gegeben $8x^2+11x+12$, welche ein Quadrat wird, wenn man $x=-1$ setzt. Man setze nun $x=y-1$, so wird

$$\begin{array}{rcl} 8x^2 & = & 8y^2-16y+8 \\ 11x & = & 11y-11 \\ 12 & = & 12 \\ \hline \text{also } 8x^2+11x+12 & = & 8y^2-5y+9. \end{array}$$

Da nun 9 das Quadrat von 3 ist, so setze man

$$\sqrt{(8y^2 - 5y + 9)} = 3 - \frac{my}{n},$$

so wird $8y^2 - 5y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{m^2y^2}{n^2}$,

also $8y^2 - 5y = \frac{m^2y^2}{n^2} - \frac{6my}{n}$,

$8y - 5 = \frac{m^2y}{n^2} - \frac{6m}{n}$,

also $8n^2y - 5n^2 = m^2y - 6mn$,

folglich $8n^2y - m^2y = 5n^2 - 6mn$,

oder $y(8n^2 - m^2) = 5n^2 - 6mn$,

daher $y = \frac{5n^2 - 6mn}{8n^2 - m^2}$.

Nun war $x = y - 1$, also

$$x = \frac{5n^2 - 6mn}{8n^2 - m^2} - 1$$

$$= \frac{5n^2 - 6mn - 8n^2 + m^2}{8n^2 - m^2}$$

$$= \frac{m^2 - 6mn - 3n^2}{8n^2 - m^2},$$

wo man für m und n wieder jede beliebige Zahl setzen kann.

Es sei $m = 4$, $n = 2$, so ist

$$x = \frac{16 - 48 - 12}{32 - 16} = -\frac{44}{16} = -\frac{11}{4}.$$

Es ist also $8x^2 = 8 \cdot \frac{121}{16} = \frac{121}{2}$

$11x = 11 \cdot -\frac{11}{4} = -\frac{121}{4}$

$12 = 12$

also $8x^2 + 11x + 12 = \frac{121}{2} - \frac{121}{4} + 12$

$= \frac{121}{4} + 12$

$= \frac{121 + 48}{4}$

$= \frac{169}{4} = (\frac{13}{2})^2$.

Es sei die Gleichung $8x^2 + 2x + 10$ gegeben. Nachdem man vergeblich einige kleine ganze Zahlen probirt hat, so kommt man auf den Gedanken, daß wohl x ein Bruch sein könnte. Man setze also $x = \frac{r}{s}$, so wird

$$8x^2 + 2x + 10 = \frac{8r^2}{s^2} + \frac{2r}{s} + 10$$

$$= 8r^2 + 2rs + 10s^2.$$

Nun probire man für r und s einige kleine Zahlen.

Ist $r=1$ und $s=1$, so wird $8r^2+2rs+10s^2 = 20$,
$r=1$: $s=2$, : : $8r^2+2rs+10s^2 = 52$,
$r=2$: $s=3$, : : $8r^2+2rs+10s^2 = 234$,
$r=3$: $r=4$, : : $8r^2+2rs+10s^2 = 256$.

Da nun die letztere Zahl ein Quadrat ist, so leistet der Werth $x=\frac{3}{4}$ der Formel ein Genüge. Man setze also $x = y+\frac{3}{4}$, so wird

$$\begin{array}{rcl} 8x^2 &=& 8y^2+12y+\frac{9}{2} \\ 2x &=& 2y+\frac{3}{2} \\ 10 &=& 10 \end{array}$$

also $8x^2+2x+10 = 8y^2+14y+16$.

Da nun 16 ein Quadrat ist, so setze man

$$\sqrt{(8y^2+14y+16)} = 4+\frac{my}{n},$$

so wird $8y^2+14y+16 = 16+\frac{8my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$,

also $8y^2+14y = \frac{8my}{n}+\frac{m^2y^2}{n^2}$,

oder $8y+14 = \frac{8m}{n}+\frac{m^2y}{n^2}$,

folglich $8n^2y+14n^2 = 8mn+m^2y$,

daher $8n^2y-m^2y = 8mn-14n^2$,

also $y = \frac{8mn-14n^2}{8n^2-m^2}$.

Da nun $x = y+\frac{3}{4}$ ist, so ist

$$x = \frac{3}{4}+\frac{8mn-14n^2}{8n^2-m^2} = \frac{24n^2-3m^2+32mn-56n^2}{32n^2-4m^2} = \frac{32mn-3m^2-32n^2}{32n^2-4m^2},$$

wo man für m und n jede beliebige Zahl setzen kann.

Es sei z. B. $m=3$ und $n=2$, so wird

$$x = \frac{32\cdot6-3\cdot9-32\cdot4}{32\cdot4-4\cdot9} = \frac{192-27-128}{128-36} = \frac{37}{92}.$$

Es ist also

$$\begin{array}{rcl} 8x^2 &=& 8\cdot(\frac{37}{92})^2 = \frac{2738}{2116} \\ 2x &=& 2\cdot\frac{37}{92} = \frac{37}{46} \\ 10 &=& 10 \end{array}$$

also $8x^2+2x+10 = \frac{2738}{2116}+\frac{37}{46}+10 = \frac{2738+1702+21160}{2116} = \frac{25600}{2116}$,

und diese Zahl ist das Quadrat von $\frac{160}{46}$.

Setzt man $m = 1$ und $n = 1$, so wird die Formel $= \frac{18}{196} - \frac{42}{196} + \frac{1960}{196} = \frac{1936}{196} = (\frac{44}{14})^2$.

§. 104.

Oft ist es aber auch unmöglich, einen Werth für x zu setzen, der aus der gegebenen Formel ein Quadrat bildet. Um sich daher die lange Mühe des Rathens zu ersparen, ist es gut, wenn man Kennzeichen hat, an denen man sehen kann, ob die Formel $cx^2 + bx + a$ ein Quadrat werden könne.

Zu dem Ende verwandle man die Formel in eine andere, in welcher das zweite Glied fehlt, welches geschieht, wenn man $x = \frac{y-b}{2c}$ setzt. Denn alsdann ist

$$cx^2 = \frac{c(y^2-2by+b^2)}{4c^2} = \frac{y^2-2by+b^2}{4c},$$

$$bx = \frac{by-b^2}{2c} = \frac{2by-2b^2}{4c},$$

$$a = a = \frac{4ac}{4c}.$$

Also $cx^2 + bx + a = \frac{y^2-2by+b^2+2by-2b^2+4ac}{4c}$

$$= \frac{y^2-b^2+4ac}{4c}.$$

Da nun $\frac{y^2-b^2+4ac}{4c}$ ein Quadrat werden soll, so sei dasselbe $= \frac{z^2}{4}$, also

$$\frac{z^2}{4} = \frac{y^2-b^2+4ac}{4c},$$

folglich $cz^2 = y^2 - b^2 + 4ac$,
daher $cz^2 + b^2 - 4ac = y^2$.

Setzt man $b^2 - 4ac = r$, so ist

$$cz^2 + r = y^2.$$

Es bleibt also nur zu untersuchen, ob die Formel $cz^2 + r$ ein Quadrat werden könne, welches sich leichter beurtheilen läßt, als aus der dreigliedrigen Formel.

Es lassen sich bei der Bestimmung von c und r verschiedene Fälle denken.

1) Ist $r = 0$, so braucht man nur für c ein Quadrat zu nehmen, dann kann man für z jede beliebige Zahl setzen, weil das Produkt aus zwei Quadraten immer ein Quadrat ist.

2) Da jede Zahl, wenn sie durch 3 dividirt wird, entweder aufgeht, oder 1, oder 2 zum Rest läßt, so sind alle Zahlen

ahlen entweder von der Form $3n$, oder $3n+1$, oder $3n+2$. ist eine Zahl von der Form $3n$, so hat ihr Quadrat die Form n^2 und ist nicht nur durch 3, sondern auch durch 9 theilbar. ist sie von der Form $3n+1$, so ist ihr Quadrat von der orm $9n^2+6n+1$. Dieses durch 3 dividirt, gibt zum uotienten $3n^2+2n$ und läßt 1 zum Reste. Es gehören glich die Quadrate der Zahlen von der Form $3n+1$ auch r Form $3n+1$. Hat die Zahl die Form $3n+2$, so ist r Quadrat $9n^2+12n+4$ und läßt, durch 3 dividirt, auch zum Reste. Alle Quadratzahlen lassen sich also entweder rch 3 theilen, oder geben einen Rest $= 1$, niemals aber nen Rest $= 2$. Hieraus ergibt sich, daß die Formel cz^2+r emals ein Quadrat werden kann, wenn $c = 3$ und $r = 2$, so $cz^2+r = 3x^2+2$ ist, denn dividirt man mit 3, so eibt 2 übrig, welches doch bei keinem Quadrate sein darf. ben so wenig können die Formeln $3x^2+5$, $3x^2+8$, $3x^2+11$ f. w., überhaupt alle von der Form $3x^2+3q+2$ Quadrate in, weil sie immer 2 zum Reste lassen. Dies gilt auch, wenn an die Zahlen nach $3x^2$ negativ setzt.

3) Wird eine Zahl durch 4 getheilt, so sind die Reste ent- eder 0, oder 1, oder 2, oder 3. Alle Zahlen sind also in ziehung auf 4 von der Form $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$. as Quadrat einer Zahl von der Form $4n$ ist $= 16n^2$, also rch 16 theilbar und von der Form $16n$, das Quadrat einer ahl von der Form $4n+1$ ist $= 16n^2+8n+1$, läßt also, rch 8 dividirt, 1 übrig und gehört zur Form $8n+1$. Ist e Wurzel von der Form $4n+2$, so ist ihr Quadrat von der orm $16n^2+16n+4$, läßt also, durch 16 dividirt, 4 übrig nd gehört zur Form $16n+4$. Ist endlich die Wurzel von r Form $4n+3$, so ist das Quadrat $16n^2+24n+9$ und ißt, durch 8 dividirt, 1 übrig und gehört zur Form $8n+1$. s sind aber die Quadrate von der Form $16n$ und $16n+4$ rade und die von der Form $8n+1$ ungerade Quadratzahlen. oll daher eine gerade Zahl ein Quadrat sein, so muß sie von r Form $16n$ oder $16n+4$ sein, alle übrige gerade Zahlen on der Form $16n+2$, $16n+6$, $16n+8$, $16n+10$ u. s. w. nnen niemals Quadrate sein, so wenig als die ungeraden, enn sie, durch 8 dividirt, 1, oder 3, oder 5, oder 7 zum eſt lassen, also die Form $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$ ben.

Dies gibt also ein neues Merkmal, um zu erkennen, ob e Formel cx^2+r ein Quadrat sein könne.

4) Wird eine Zahl durch 5 getheilt, ſo gehört ſie zu 4 Formen: 1) $5n$, 2) $5n+1$, 3) $5n+2$, 4) $5n+3$, 5) $5n+4$. Das Quadrat von $5n$ iſt $= 25n^2$, alſo durch 5 und 25 theilbar, das Quadrat von $5n+1$ iſt $= 25n^2+10n+1$, alſo von der Form $5n+1$, das Quadrat von $5n+2 = 25n^2+20n+4$, alſo von der Form $5n+4$, das Quadrat von $5n+3 = 25n^2+30n+9$, alſo auch von der Form $5n+4$, endlich das Quadrat von $5n+4 = 25n^2+40n+16$, alſo von der Form $5n+1$. Wenn daher eine Quadratzahl ſich nicht durch 5 theilen läßt, ſo iſt der Reſt immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3. Alle Formeln alſo von der Form $5n+2$, $5n+3$ ſind keine Quadrate.

Auf dieſe Art kann man bei jeder gegebenen Form cx^2+bx+a, wenn ſie auf die Form cz^2+r gebracht worden iſt, unterſuchen, ob ſie möglicher Weiſe ein Quadrat ſein könne, indem man c als Theiler nimmt, damit in cz^2+r dividirt und den Reſt bemerkt. Dann unterſucht man, zu welcher Form die Quadrate der Zahlen ſind, welche mit dem Theiler dividirt, aufgehen, oder 1, 2, 3, 4 u. ſ. w. zum Reſt laſſen; daraus läßt ſich dann beurtheilen, ob $\frac{cz^2+r}{c}$ zu dieſer Formen gehöre oder nicht, ob alſo cz^2+r ein Quadrat werden könne oder nicht.

Es ſei z. B. die Formel $7x^2+8x+2$ gegeben. Setzt man $x = \frac{y-8}{2\cdot 7} = \frac{y-8}{14}$, ſo wird

$$7x^2 = \frac{y^2-16y+64}{4\cdot 7},$$

$$8x = \frac{16y-128}{4\cdot 7},$$

$$6 = \frac{4\cdot 2\cdot 7}{4\cdot 7},$$

alſo $$7x^2+8x+2 = \frac{y^2-8}{4\cdot 7}.$$

Iſt nun $\frac{y^2-8}{4\cdot 7}$ ein Quadrat, ſo ſei

$$\frac{y^2-8}{4\cdot 7} = \frac{z^2}{4},$$

folglich $$y^2-8 = 7z^2,$$

alſo $$y^2 = 7z^2+8.$$

Theilt man durch 7, ſo kommt $z+1$ und zum Reſt bleibt 1. Es iſt alſo $7z^2+8 = (z^2+1)\cdot 7+1$, alſo von der Form $7n+1$. Nun ſind alle Zahlen, die durch 7 getheilt werden

	von der Form	ihre Quadrate aber			gehören zur Form
1).	$7n$	$49n^2$			$7n$
2)	$7n+1$	$49n^2$	$+14n$	$+1$	$7n+1$
3)	$7n+2$	$49n^2$	$+28n$	$+4$	$7n+4$
4)	$7n+3$	$49n^2$	$+42n$	$+9$	$7n+2$
5).	$7n+4$	$49n^2$	$+56n$	$+16$	$7n+2$
6)	$7n+5$	$49n^2$	$+70n$	$+25$	$7n+4$
7)	$7n+6$	$49n^2$	$+84n$	$+36$	$7n+1$

Da nun $7z^2+8$ zur Form $7n+1$ gehört, so kann es lerdings eine Quadratzahl werden. Man braucht nur $z=2$ u setzen, so ist $7z^2+8 = 7\cdot 4+8 = 36$. Daraus giebt sich denn $y=6$ und $x = \frac{6-8}{2\cdot 7} = -\frac{1}{7}$. Also $x^2+8x+2 = \frac{7}{49}-\frac{56}{49}+\frac{98}{49} = \frac{49}{49} = 1$.

Anstatt die Reste, welche die Theiler lassen, positiv zu hmen, kann man sie auch negativ setzen; denn, wenn man B. mit 4 in 15 dividirt, so kommt entweder zum Quotienten und 3 bleibt übrig, oder es kommt zum Quotienten 4 und Rest ist -1. Auf diese Art ist der Form nach einerlei $+6$ und $7n-1$, $7n+5$ und $7n-2$, $7n+4$ und -8, $7n+3$ und $7n-4$, $7n+2$ und $7n-5$, $7n+1$ nd $7n-6$. Ob also der bleibende Rest positiv oder negativ i, ändert in der Sache nichts.

§. 105.

Daß die Regel des vorigen Paragraphen gelte, wenn z ne ganze Zahl ist, ist erwiesen; wir wollen also nur den Fall och erörtern, wenn z ein Bruch ist. Es sei also z ein Bruch $= \frac{p}{q}$, von dem wir annehmen, daß er schon auf seine kleinste orm gebracht ist und weiter keinen Theiler als 1 hat. Sollte un $3\cdot\frac{p^2}{q^2}+2$ ein Quadrat, also $\frac{3p^2}{q^2}+2 = y^2$ sein, so müßte auch $3p^2+2q^2 = q^2y^2$, also ebenfalls ein Quadrat in, weil q^2y^2 immer ein Quadrat ist. Nun sind zwei Fälle öglich, entweder q läßt sich durch 3 theilen, und in diesem alle ist p nicht durch 3 theilbar, weil p und q Primzahlen nter sich sind, oder q läßt sich nicht durch 3 theilen. Es sei lso q durch 3 theilbar, also $q = 3m$, dann ist $2q^2 = 18m^2$, nglich $3p^2+18m^2 = 9m^2y^2$. Dividirt man mit 3, so ommt $p^2+6m^2 = 3m^2y^2$. Sollte nun p^2+6m^2 auch in Quadrat sein, so müßte es sich nochmals durch 3 theilen assen, allein es läßt sich wohl $6m^2$, aber nicht p^2 theilen,

weil 3 kein Theiler von p ist, also kann p^2+6m^2 kein Quadrat sein, folglich auch nicht $3p^2+18m^2$, also auch nicht $3p^2+2q^2$ oder $\frac{3p^2}{q^2}+2$.

Ist q nicht durch 3 theilbar, so wäre $3p^2+2q^2$ nur in dem Falle ein Quadrat, wenn ein Rest $= 1$ bliebe. Nun ist $3p^2$ durch 3 theilbar, es kommt also nur darauf an, wie $\frac{2q^2}{3}$ für einen Rest läßt. Da nun $\frac{q^2}{3}$ zum Reste 1 und nicht 2 lassen kann, so ist $\frac{q^2}{3}$ eine Zahl von der Form $3n+1$ und folglich $2q^2$ von der Form $6n+2$. Dies durch 3 theilbar läßt aber 2 zum Reste, also läßt auch $3p^2+2q^2$ die Zahl 2 zum Reste, kann folglich kein Quadrat sein. Formen von der Art, wie $3p^2+2q^2$, $3p^2+5q^2$, $3p^2+8q^2$, $3p^2+11q^2$ u. s. w., allgemein also die Form $3p^2+(3n+2)q^2$ können niemals Quadrate sein.

Auf eben die Art läßt sich von dem Theiler 4 beweisen, daß Formen, wie $3p^2+2q^2$, oder allgemeiner $3p^2+(8n+2)q^2$, oder noch allgemeiner $(8m+3)p^2+(8n+2)q^2$ niemals Quadrate sein können, es mögen m und n positive oder negative Zahlen bedeuten, welche sie wollen. Eben so sind bei dem Theiler 5 Formen wie $3p^2+(5n+2)q^2$ oder $5p^2+(5n+3)q^2$ niemals Quadrate. Auch kann man in allen diesen Formen n negativ setzen, ohne daß dadurch in der Richtigkeit des Satzes eine Änderung geschieht.

§. 106.

Endlich wollen wir noch die Frage zu erörtern suchen, wann die Formel cx^2+bx+a, oder nachdem das zweite Glied weggeschafft worden, die Formel cz^2+r ein Quadrat einer ganzen Zahl wird. Es sei also $cz^2+r = y^2$, so daß z und y ganze Zahlen sind, weil es c und r sein sollen.

Die Hauptbedingung ist, daß man schon einen Fall errathen habe, wo cz^2+r ein Quadrat einer ganzen Zahl ist. Ist dies, so lassen sich daraus alle anderen Fälle, wo dies Statt findet, entwickeln.

Es sei also cz^2+r einem bekannten Quadrate g^2 und z für diesen Fall der bekannten Zahl f gleich. Es ist also $cf^2+r = g^2$, und da auch $cz^2+r = y^2$ ist, so subtrahire man die erste Gleichung von der letzten, so kommt

$$cz^2-cf^2 = y^2-g^2,$$

oder

$$c(z^2-f^2) = y^2-g^2.$$

Es ist aber $z^2 - f^2$, so wie auch $y^2 - g^2$ die Differenz zweier Quadrate und diese läßt sich allemal als ein Produkt aus der Summe der Wurzeln in die Differenz der Wurzeln ausdrücken, also $z^2 - f^2$ durch $(z+f).(z-f)$ und $y^2 - g^2$ durch $(y+g).(y-g)$. Folglich hat man die Gleichung

$$c(z+f).(z-f) = (y+g).(y-g).$$

Man multiplizire auf beiden Seiten mit pq, so kommt

$$cpq(z+f).(z-f) = pq(y+g).(y-g),$$

oder $$cp(z+f)\,q(z-f) = q(y+g)\,p(y-g).$$

Nach dem Grundsatze: Gleiches mit Gleichem multiplizirt, gibt Gleiches, kann man, da die Produkte gleich sind, auch die einzelnen Faktoren gleich setzen, also $cp(z+f) = q(y+g)$ und $q(z-f) = p(y-g)$ und nun suche man aus diesen Gleichungen z und y zu bestimmen.

Ist also $cp(z+f) = q(y+g)$, so ist

$$\frac{cp(z+f)}{q} = \frac{q(y+g)}{q},$$

oder $$\frac{cpz+cpf}{q} = y+g.$$

Ist ferner $q(z-f) = p(y-g)$, so ist

$$\frac{q(z-f)}{p} = \frac{p(y-g)}{p},$$

oder $$\frac{qz-qf}{p} = y-g.$$

Nun subtrahire man die Gleichung $y-g = \frac{qz-qf}{p}$ von $y+g = \frac{cpz+cpf}{q}$, so kommt

$$2g = \frac{cpz+cpf}{q} - \frac{qz-qf}{p}$$

$$= \frac{cp^2z+cp^2f-q^2z+q^2f}{pq}$$

$$= \frac{cp^2z-q^2z+cp^2f+q^2f}{pq}.$$

Bringt man nun unter einerlei Nenner, so kommt

$$2gpq = cp^2z - q^2z + cp^2f + q^2f,$$

oder $$2gpq - f(cp^2+q^2) = (cp^2-q^2)z,$$

also $$\frac{2gpq - f(cp^2+q^2)}{cp^2-q^2} = z,$$

oder $$\frac{2gpq}{cp^2-q^2} - \frac{f(cp^2+q^2)}{cp^2-q^2} = z.$$

Nun war $y - g = \frac{qz - qf}{p}$, also

$$y = g + \frac{qz - qf}{q} = \frac{pg + qz - qf}{p}.$$

Setzt man nun statt z den gefundenen Werth, so kommt

$$y = \frac{pg + \frac{2gpq^2}{cp^2 - q^2} - \frac{qf(cp^2 + q^2)}{cp^2 - q^2} - qf}{p}$$

$$= \frac{cp^3g - pgq^2 + 2gpq^2 - qfcp^2 - q^3f - cp^2qf + q^3f}{p(cp^2 - q^2)}$$

$$= \frac{cp^2 + gpq^2 - 2cp^2pf}{p(cp^2 - q^2)}$$

$$= \frac{cp^2g + gq^2 - 2cpqf}{cp^2 - q^2}$$

$$= \frac{g(cp^2 + q^2) - 2cpqf}{cp^2 - q^2}.$$

Setzt man jetzt $\frac{(cp^2 + q^2)}{cp^2 - q^2} = m$ und $\frac{2pq}{cp^2 - q^2} = n$, so wird $y = mg - ncf$.

Man muß aber m und n nach den angenommenen Werthen gehörig bestimmen. Man betrachte zu dem Ende ihre Quadrate, so wird

$$m^2 = \frac{c^2p^4 + 2cp^2q^2 + q^4}{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4}$$

und

$$n^2 = \frac{4p^2q^2}{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4},$$

also

$$cn^2 = \frac{4cp^2q^2}{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4}.$$

Zieht man nun den letzten Bruch vom ersten ab, so kommt

$$m^2 - cn^2 = \frac{c^2p^4 + 2cp^2q^2 + q^4 - 4cq^2q^2}{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4}$$

$$= \frac{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4}{c^2p^4 - 2cp^2q^2 + q^4}.$$

Da nun dieser Bruch $= 1$ ist, so wissen wir, daß die Zahlen m und n so beschaffen sein müssen, daß $m^2 - cn^2 = 1$ oder $m^2 = cn^2 + 1$ ist. Da nun c gegeben ist, so muß man für n eine solche ganze Zahl suchen, daß $cn^2 + 1$ ein Quadrat werde, dessen Wurzel daher $= m$ ist. Da man nun auch die Zahl f gefunden hat und weiß, daß $cf^2 + r = g^2$ ist, so erhält man $y = mg - ncf$ in bekannten Größen. Eben so z, welches oben $= \frac{2gpq}{cp^2 - q^2} - \frac{f(cp^2 + q^2)}{cp^2 - q^2}$ ge-

unden worden war. Da nun $\frac{2pq}{cp^2-q^2} = m$ und $\frac{cp^2+q^2}{cp^2-q^2} = n$ war, so ist $z = ng - mf$.

Anstatt m und n kann man auch $-m$ und $-n$ schreiben, weil die Quadrate von $-m$ und $-n$ auch $+m^2$ und $+n^2$ sind. Deswegen kann man auch setzen

$$y = mg - (-ncf) = mg + ncf$$
und
$$z = ng - (-mf) = ng + mf.$$

Hat man so aus f und g den neuen Werth für z und y gefunden, so setzt man wieder $ng + mf$ anstatt f und $mg + ncf$ statt g, so ergeben sich wieder neue Werthe für z und y, aus denen man durch dieselbe Operation immer andere und andere Werthe finden kann u. s. w. bis ins Unendliche.

Da wir aus dem Vorigen schon wissen, daß n so beschaffen sein müsse, daß $cn^2 + 1 = m^2$ sei, so läßt sich der Werth von z und y auch auf folgende Art finden.

Es ist $cz^2 + r = y^2$ und $cf^2 + r = g^2$, also

$$r = y^2 - cz^2$$
und
$$r = g^2 - cf^2,$$
folglich
$$y^2 - cz^2 = g^2 - cf^2.$$

Hat man nun also schon eine Zahl n von der Beschaffenheit gefunden, daß $cn^2 + 1 = m^2$,
folglich
$$1 = m^2 - cn^2$$
sei, so multiplizire man $y^2 - cz^2$ mit 1 und $g^2 - cf^2$ mit $m^2 - cn^2$, wodurch die Gleichung nicht verändert wird, weil man auf beiden Seiten mit gleichen Größen multiplizirt hat. Dann erhält man

$$y^2 - cz^2 = (g^2 - cf^2).(m^2 - cn^2)$$
$$= g^2m^2 - cf^2m^2 - g^2cn^2 + c^2f^2n^2.$$

Setzen wir nun $y = gm + cfn$, so wird

$$y^2 = g^2m^2 + 2gmcfn + c^2f^2n^2,$$
also $y^2 - cz^2 = g^2m + 2gmcfn + c^2f^2n^2 - cz^2$,
und daher
$$g^2m + 2gmcfn + c^2f^2n^2 - cz^2 = g^2m^2 - cf^2m^2 - g^2cn^2 + c^2f^2n^2.$$

Hier hebt sich gegen einander g^2m^2 mit g^2m^2, ferner $c^2f^2n^2$ mit $c^2f^2n^2$. Also bleibt

$$2gmcfn - cz^2 = -cf^2m^2 - cg^2n^2,$$
oder
$$cz^2 - 2gmcfn = cg^2n^2 + cf^2m^2,$$
folglich
$$cz^2 = cg^2n^2 + 2gmfcn + cf^2m^2.$$

Alles durch c dividirt, kommt

$$z^2 = g^2n^2 + 2gmfn + f^2m^2.$$

Es ist aber dieser Werth von z^2 gleich dem Quadrate von $gn + mf$, folglich ist $z = gn + mf$,
und daraus ergibt sich denn auch

$$y = mg + ncf.$$

Beispiele.

1) Welche ganze Zahlen geben ein Quadrat, wenn man ihr Quadrat doppelt nimmt und 1 davon abzieht?

Die Gleichung ist

$$2z^2 - 1 = y^2.$$

Es ist also $c = 2$ und $r = -1$.

Einen Fall, wo die Gleichung wahr ist, findet man leicht, wenn man setzt $z = 1$, denn dann ist $2 \cdot 1 - 1 = 1$, also ein Quadrat. Man hat also $f = 1$ und $g = 1$. Sucht man nun eine Zahl n von der Beschaffenheit, daß $2n^2 + 1$ ein Quadrat ist, also $2n^2 + 1 = m^2$, so sieht man leicht, daß $n = 2$ eine solche Zahl sei, denn $2 \cdot 2^2 + 1$ ist $= 2 \cdot 4 + 1 = 9$, also $m = 3$. Daher hat man

$$z = mf + ng = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5,$$
$$y = mg + ncf = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 7.$$

Setzt man jetzt wieder $f = 5$ und $g = 7$, so wird

$$z = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 29,$$
$$y = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 41.$$

Setzt man nun $f = 29$ und $g = 41$, so wird

$$z = 3 \cdot 29 + 2 \cdot 41 = 169,$$
$$y = 3 \cdot 41 + 2 \cdot 2 \cdot 29 = 239$$

u. s. w.

2) In welchen Fällen wird $3z^2 + 1$ ein Quadrat?

Es ist der Fall, wenn $z = 1$ ist, also hat man $f = 1$ und $g = 2$. Sucht man nun wieder eine Zahl n von der Art, daß $3n^2 + 1$ ein Quadrat sei, so kann man ebenfalls $n = 1$ und $m = 2$ nehmen, dann wird

$$z = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4,$$
$$y = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 = 7.$$

Ist nun $f = 4$ und $g = 7$, $n = 1$ und $m = 2$, so wird aufs neue

$$z = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 = 15,$$
$$y = 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 4 = 26$$

u. s. w.

Die Werthe von z und y bilden Reihen, deren Gesetz sich auf folgende Art finden läßt.

Es sei allgemein die Formel gegeben

$$cz^2 + b = y^2,$$

so sind die ersten Werthe $z = f$ und $y = g$. Daraus findet man die zweiten

$$z = ng + mf,$$
$$y = mg + cnf.$$

Nun sei wieder $ng + mf = f'$ und $mg + cnf = g'$, so bekommt man die dritten Werthe

$$z = ng' + mf' = f'',$$
$$y = mg' + cnf' = g''.$$

Also die vierten Werthe

$$z = ng'' + mf'' = f''',$$
$$y = mg'' + cnf'' = g'''.$$

Folglich die fünften Werthe

$$z = ng''' + mf''' = f'''',$$
$$y = mg''' + cnf''' = g'''' \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir jetzt die nach einander folgenden Werthe von

$$z = f, A, B, C, D, E, F \text{ u. s. w.}$$

und die Werthe von $y = g, N, O, P, Q, R, S$ u. s. w., so ergibt sich folgende Übersicht der Werthe von z und y.

$z = f$	$ng + mf = A$	$nN + mA = B$	$nO + mB = C$	$nP + mC = D$		
$y = g$	$mg + cnf = N$	$mN + cnA = O$	$mO + cnB = P$	$mP + cnC = Q$		
$z = nQ + mD = E$	$nR + mE = F$	$nS + mF = G$	u. s. w.			
$y = mQ + cnD = R$	$mR + cnE = S$	$mS + cnF = T$	u. s. w.			

Nach dieser Anordnung kann man aber keine der beiden Reihen ohne die andere fortsetzen. Es läßt sich aber daraus eine Regel entwickeln, vermittelst der man jede Reihe unabhängig von der andern bilden kann. Es ist z. B.

$$E = nQ + mD = n(mP + cnC) + m(nP + mC)$$
$$= nmP + cn^2C + mnP + m^2C$$
$$= 2nmP + cn^2C + m^2C.$$

Nun ist $nP + mC = D$, also $nP = D - mC$, folglich

$$E = 2mD - 2m^2C + cn^2C + m^2C$$
$$= 2mD - m^2C + cn^2C$$
$$= 2mD - (m^2 - cn^2)C.$$

Es ist aber $m^2 = cn^2 + 1$, also

$$m^2 - cn^2 = cn^2 + 1 - cn^2 = 1,$$

folglich $E = 2mD - C$.

Es wird also E aus den beiden vorhergehenden Gliedern D und C der ersten Reihe, und eben so D aus C und B, C aus B und A, B aus A und f bestimmt. Daher sind die Glieder der obern Reihe

$$x = f\,|\,ng+mf\,|\,2mA-f\,|\,2mB-A\,|\,2mC-B\,|\,2mD-C \text{ u. s. w.}$$

Eben so läßt sich auch das Gesetz, nach dem die ganze Reihe fortgeht, bestimmen. Es ist z. B.

$$T = mS+cnF,$$

aber

$$F = nR+mE,$$

also

$$T = mS+cn^2R+cnmE.$$

Ferner ist $S = mR+cnE$, also

$$cnE = S-mR.$$

Schreibt man nun diesen Werth anstatt cnE, so kommt

$$T = mS+cn^2R+mS-m^2R$$
$$= 2mS+R(cn^2-m^2).$$

Es ist aber $m^2 = cn^2+1$, also

$$cn^2-cm^2 = cn^2-cn^2-1 = -1,$$

folglich $R(cn^2-m^2) = -P$,

und daher $T = 2mS-R$.

So wie also T aus den beiden vorhergehenden Gliedern der zweiten Reihe, nämlich S und R entsteht, so wird S aus R und Q, R aus Q und P, Q aus P und O u. s. w. gebildet. Daher sind die Glieder der untern Reihe

$$y = g\,|\,mg+cnf\,|\,2mN-g\,|\,2mO-N\,|\,2mP-O\,|\,2mQ-P\,|\,2mR-Q \text{ u. s. w.}$$

Hat man also in jeder Reihe die zwei ersten Glieder bestimmt, so lassen sich alle folgenden bis ins Unendliche leicht finden.

§. 107.

Es ist nicht immer möglich, für n solche Zahlen zu finden, daß cn^2+1 ein Quadrat werde, sobald c als bestimmte Zahl gegeben ist. Es darf nämlich erstlich die Zahl c nicht negativ sein, weil dadurch auch cn^2 negativ wird. Zweitens darf aber auch c selbst keine Quadratzahl sein, weil sonst cn^2 auch ein Quadrat wird, und daher zu 1 addirt nicht wieder ein Quadrat geben kann. Ist daher c eine positive Zahl und kein Quadrat, so läßt sich auch n allemal so bestimmen, daß cn^2+1 ein Quadrat wird. Man hat zwar dafür keine allgemeine Methode, aber doch eine, die für jeden einzelnen Werth von c gebraucht werden kann. Wir wollen sie an einigen Beispielen zeigen.

1) Es sei $c = 3$; man soll also eine Zahl für n suchen, daß cn^2+1 ein Quadrat sei.

Man setze $\sqrt{(3n^2+1)} = n+p$, so ist

$$3n^2+1 = n^2+2np+p^2,$$

also

$$2n^2+1 = 2np+p^2,$$

olglich $n^2 - np = \frac{p^2-1}{2}$,

lso $n^2 - np + \frac{1}{4}p^2 = \frac{p^2-1}{2} + \frac{1}{4}p^2$

$= \frac{2p^2-2+p^2}{4}$

$= \frac{3p^2-2}{4}$.

Daher $n = \frac{p+\sqrt{(3p^2-2)}}{2}$.

Nun ist aber $\sqrt{(3p^2-2)}$ größer als p, folglich n auch größer als p. Man setze also $n = p+q$, so ist

$p+q = \frac{p+\sqrt{(3p^2-2)}}{2}$,

lso $2p+2q = p+\sqrt{(3p^2-2)}$,
olglich $p+2q = \sqrt{(3p^2-2)}$,
nd auf beiden Seiten quadrirt, kommt

$p^2+4pq+4q^2 = 3p^2-2$,
lso $4pq+4q^2 = 2p^2-2$,
der $4pq+4q^2+2 = 2p^2$,
aher $2pq+2q^2+1 = p^2$,
aher $p^2-2pq = 2q^2+1$,
lso $p^2-2pq+q^2 = 2q^2+1+q^2$

$= 3q^2+1$,

olglich $p = q+\sqrt{(3q^2+1)}$.

Nun hat $\sqrt{(3q^2+1)}$ eben die Form, wie die gegebene Gleichung; man beendet also die weitere Analyse und setzt $q = 0$, so wird $p = 0+\sqrt{(3\cdot0^2+1)} = 0+\sqrt{1} = 1$. Da nun $n = p+q = 1+0 = 1$ war, so ist

$\sqrt{(3n^2+1)} = 2$,

daher wird $3n^2+1$ ein Quadrat, wenn man $n = 1$ setzt.

2) Es sei die Formel $5n^2+1$ gegeben.

Die Wurzel davon muß offenbar größer sein, als $2n$, also sei $\sqrt{(5n^2+1)} = 2n+p$, so ist

$5n^2+1 = 4n^2+4np+p^2$,
oder $n^2+1 = 4np+p^2$,
oder $n^2 = 4np+p^2-1$,
oder $n^2-4np = p^2-1$,
daher $n^2-4np+4p^2 = p^2-1+4p^2$,
also $n^2-4np+4p^2 = 5p^2-1$,
folglich $n = 2p+\sqrt{(5p^2-1)}$.

Nun ist $\sqrt{(5p^2-1)}$ größer als $2p$, folglich n größer als $4p$, daher setze man $n = 4p+q$, so ist

$$4p+q = 2p+\sqrt{(5p^2-1)},$$

also

$$2p+q = \sqrt{(5p^2-1)},$$

folglich, wenn man das Quadrat macht,

$$4p^2+4pq+q^2 = 5p^2-1,$$

daher

$$4pq+q^2 = p^2-1,$$

oder

$$4pq+q^2+1 = p^2.$$

Also

$$p^2-4pq = q^2+1$$

und

$$p^2-4pq+4q^2 = q^2+1+4q^2$$

$$= 5q^2+1.$$

Folglich

$$p = 2q+\sqrt{(5q^2+1)}.$$

Nun hat $5q^2+1$ wieder die ursprüngliche Form, man setze also $q = 0$, so wird $p = 1$, daher $n = 4$, also $\sqrt{(5n^2+1)} = \sqrt{(5\cdot 4^2+1)} = \sqrt{81} = 9$.

3) Es sei die Formel $7n^2+1$ gegeben, welche $= n'$ sein soll.

In diesem Falle muß n offenbar kleiner sein als $3n$, weil $(3n)^2$ schon $= 9n^2$ ist. Man setze also $n = 3n-p$, so ist

$$7n^2+1 = 9n^2-6np+p^2,$$

also

$$1 = 2n^2-6np+p^2,$$

oder

$$2n^2-6np = -p^2+1,$$

und

$$n^2-3np = \frac{-p^2+1}{2},$$

daher

$$n^2-3np+\frac{9p^2}{4} = \frac{-p^2+1}{2}+\frac{9p^2}{4}$$

$$= \frac{-2p^2+2+9p^2}{4}$$

$$= \frac{7p^2+2}{4},$$

Also

$$n = \frac{3p-\sqrt{(7p^2+2)}}{2}.$$

Es ist also n kleiner als $3p$, und man setze daher $n = 3p-q$, so ist

$$3p-q = \frac{3p-\sqrt{(2p^2+2)}}{2},$$

also

$$6p-2q = 3p-\sqrt{(7p^2+2)},$$

folglich

$$3p-2q = -\sqrt{(7p^2+2)}.$$

Auf beiden Seiten quadrirt, kommt

$$9p^2-12pq+4q^2 = 7p^2+2,$$

also

$$2p^2-12pq+4q^2 = 2,$$

folglich $p^2 - 6pq + 2q^2 = 1$,
daher $p^2 - 6pq = -2q^2 + 1$,
oder $p^2 - 6pq + 9q^2 = -2q^2 + 1 + 9q^2$
$q = 7q^2 + 1$.
Also $p = 3q + \sqrt{(7q^2 + 1)}$.

Nun setze man wieder $q = 0$, so wird $p = 1$, daher $n = 3$, also $7n^2 + 1 = 64$ und $\sqrt{(7n^2 + 1)} = m = 8$.

§. 108.

Bis zu $c = 13$ werden die gezeigten Operationen noch nicht zu weitläuftig, aber bei 13 und größeren Zahlen ist es oft schon mühsam. Wir wollen daher noch das Beispiel $13n^2 + 1$ zu einem Quadrate zu machen, ausführen.

Es sei also $13n^2 + 1 = m^2$, so muß m größer sein als 3n. Man setze daher $13n^2 + 1 = (3n + p)^2$, so kommt

$13n^2 + 1 = 9n^2 + 6np + p^2$,
oder $4n^2 + 1 = 6np + p^2$,
also $4n^2 - 6np = p^2 - 1$,
oder $n^2 - \frac{3}{2}np = \frac{p^2 - 1}{4}$,

folglich
$$n = \frac{\frac{3}{4}p + \sqrt{\left(\frac{9}{16}p^2 + \frac{4p^2 - 4}{4}\right)}}{2}$$
$$= \frac{\frac{3}{4}p + \frac{\sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}}{2}$$
$$= \frac{3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}.$$

Es ist daher n größer als $\frac{3}{4}p + \sqrt{\frac{9p^2}{16}}$ oder n größer als $\frac{6p}{4}$, und also n größer als p. Man setze daher $n = p + q$, so wird

$p + q = \frac{3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}}{4}$,
oder $4p + 4q = 3p + \sqrt{(13p^2 - 4)}$,
also $p + 4q = \sqrt{(13p^2 - 4)}$
und $p^2 + 8pq + 16q^2 = 13p^2 - 4$,
daher $8pq + 16q^2 = 12p^2 - 4$,
oder $2pq + 4q^2 = 3p^2 - 1$.
Daher $3p^2 - 2pq = 4q^2 + 1$,
oder $p^2 - \frac{2}{3}pq = \frac{4q^2 + 1}{3}$,

alſo $p = \frac{1}{3}q + \sqrt{\left(\frac{1}{9}q^2 + \frac{4q^2+1}{9}\right)}$,

$= \frac{1}{3}q + \sqrt{\left(\frac{q^2+12q^2+3}{9}\right)}$

$= \frac{1}{3}q + \frac{\sqrt{(13q^2+3)}}{3}$

$= \frac{q+\sqrt{(13q^2+3)}}{3}$.

Es iſt daher p wieder größer als $\frac{q+3q}{3}$, alſo p größer als q. Man ſetze alſo $p = q+r$, ſo wird

$q + r = \frac{q+\sqrt{(13q^2+3)}}{3}$,

oder $3q + 3r = q + \sqrt{(13q^2+3)}$,
alſo $2q + 3r = \sqrt{(13q^2+3)}$,
folglich $4q^2 + 12qr + 9r^2 = 13q^2 + 3$,
alſo $12qr + 9r^2 = 9q^2 + 3$,
oder $4qr + 3r^2 = 3q^2 + 1$.
Daher $3q^2 - 4qr = 3r^2 - 1$,
oder $q^2 - \frac{4}{3}qr = r^2 - \frac{1}{3}$,
alſo $q^2 - \frac{4}{3}qr + \frac{4}{9}r^2 = r^2 + \frac{4}{9}r^2 - \frac{1}{3}$

$= \frac{9r^2+4r^2-3}{9}$

$= \frac{13r^2-3}{9}$.

Daher $q = \frac{2}{3}r + \frac{\sqrt{(13r^2-3)}}{3}$

$= \frac{2r+\sqrt{(13r^2-3)}}{3}$.

Es iſt folglich q größer als $\frac{2r+3r}{3}$, daher q größer als r. Man ſetze alſo $q = r+s$, ſo wird

$r + s = \frac{2r+\sqrt{(13r^2-3)}}{3}$,

oder $3r + 3s = 2r + \sqrt{(13r^2-3)}$,
alſo $r + 3s = \sqrt{(13r^2-3)}$,
daher $r^2 + 6rs + 9s^2 = 13r^2 - 3$,
folglich $6rs + 9s^2 = 12r^2 - 3$,
oder $2rs + 3s^2 = 4r^2 - 1$,
alſo $4r^2 - 2rs = 3s^2 + 1$,
oder $r^2 - \frac{1}{2}rs = \frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{4}$,

$$\text{daher} \quad r^2 - \tfrac{1}{2}rs + \tfrac{1}{16}s^2 = \tfrac{3}{4}s^2 + \tfrac{1}{16}s^2 + \tfrac{1}{4},$$

$$\text{oder} \quad r^2 - \tfrac{1}{2}rs + \tfrac{1}{16}s^2 = \frac{13s^2+4}{16},$$

$$\text{also} \quad r = \tfrac{1}{4}s + \sqrt{\left(\frac{13s^2+4}{16}\right)}$$

$$= \frac{s+\sqrt{(13s^2+4)}}{4}.$$

Es ist daher r wieder größer als $\frac{s+3s}{4}$, also r größer als $\frac{s}{2}$, folglich setze man $r = s+t$, so wird

$$s+t = \frac{s+\sqrt{(13s^2+4)}}{4},$$

$$\text{also} \quad 4s+4t = s+\sqrt{(13s^2+4)},$$

$$\text{daher} \quad 3s+4t = \sqrt{(13s^2+4)},$$

$$\text{folglich} \quad 9s^2+24st+16t^2 = 13s^2+4.$$

$$\text{Daher} \quad 24st+16t^2 = 4s^2+4,$$

$$\text{oder} \quad 6st+4t^2 = s^2+1,$$

$$\text{also} \quad s^2 - 6st = 4t^2 - 1,$$

$$\text{also} \quad s = 3t+\sqrt{(9t^2+4t^2-1)}$$

$$= 3t+\sqrt{(13t^2-1)}.$$

Es ist daher s größer als $3t+3t$, oder größer als $6t$, darum setze man $s = 6t+u$, so ist

$$6t+u = 3t+\sqrt{(13t^2-1)},$$

$$\text{also} \quad 3t+u = \sqrt{(13t^2-1)},$$

$$\text{folglich} \quad 9t^2+6tu+u^2 = 13t^2-1,$$

$$\text{daher} \quad 6tu+u^2 = 4t^2-1,$$

$$\text{oder} \quad 4t^2-6tu = u^2+1,$$

$$\text{also} \quad t^2-\tfrac{3}{2}tu = \tfrac{1}{4}u^2+\tfrac{1}{4},$$

$$\text{oder} \quad t^2-\tfrac{3}{2}tu+\tfrac{9}{16}u^2 = \tfrac{1}{4}u^2+\tfrac{9}{16}u^2+\tfrac{1}{4}$$

$$= \frac{13u^2+4}{16},$$

$$\text{also} \quad t = \frac{3u+\sqrt{(13u^2+4)}}{4}.$$

Es ist also wieder t größer als $\frac{3u+3u}{4}$, also größer als u. Man setze daher $t = u+v$, so ist

$$u+v = \frac{3u+\sqrt{(13u^2+4)}}{4},$$

$$\text{also} \quad 4u+4v = 3u+\sqrt{(13u^2+4)},$$

$$\text{oder} \quad u+4v = \sqrt{(13u^2+4)},$$

$$\text{daher} \quad u^2+8uv+16v^2 = 13u^2+4,$$

$$\text{oder} \quad 8uv+16v^2 = 12u^2+4,$$

oder $2uv + 4v^2 = 3u^2 + 1.$
Also $3u^2 - 2uv = 4v^2 - 1,$
oder $u^2 - \frac{2}{3}uv = \frac{4}{3}v^2 - \frac{1}{3}.$
Dieß gibt wieder $u = \frac{v + \sqrt{(13v^2 - 3)}}{3}.$

Also ist u größer als $\frac{v + 3v}{3}$, oder u größer als v.
Man setze also $u = v + x$, so ist

$$v + x = \frac{v + \sqrt{(13v^2 - 3)}}{3},$$

oder $3v + 3x = v + \sqrt{(13v^2 - 3)},$
also $2v + 3x = \sqrt{(13v^2 - 3)},$
und $4v^2 + 12vx + 9x^2 = 13v^2 - 3,$
daher $12vx + 9x^2 = 9v^2 - 3,$
oder $4vx + 3x^2 = 3v^2 - 1,$
also $3v^2 - 4vx = 3x^2 + 1,$
oder $v^2 - \frac{4}{3}vx = x^2 + \frac{1}{3}.$
Daraus ergibt sich $v = \frac{2x + \sqrt{(13x^2 + 3)}}{3}.$

Es ist daher v größer als $\frac{2x + 3x}{3}$, also größer als x,
daher setze man $v = x + y$, so ist

$$x + y = \frac{2x + \sqrt{(13x^2 + 3)}}{3},$$

oder $3x + 3y = 2x + \sqrt{(13x^2 + 3)},$
also $x + 3y = \sqrt{(13x^2 + 3)},$
und $x^2 + 6xy + 9y^2 = 13x^2 + 3,$
folglich $6xy + 9y^2 = 12x^2 + 3.$
Daher $12x^2 - 6xy = 9y^2 - 3,$
oder $4x^2 - 2xy = 3y^2 - 1,$
also $x^2 - \frac{1}{2}xy = \frac{3}{4}y^2 - \frac{1}{4},$
und daher $x = \frac{y + \sqrt{(13y^2 - 4)}}{4}.$

Es ist also x größer als $\frac{y + 3y}{4}$, also größer als y.
Man setze daher $x = y + z$, so ist

$$y + z = \frac{y + \sqrt{(13y^2 - 4)}}{4},$$

oder $4y + 4z = y + \sqrt{(13y^2 - 4)},$
daher $3y + 4z = \sqrt{(13y^2 - 4)},$
also $9y^2 - 24yz + 16z^2 = 13y^2 - 4,$
folglich $24yz + 16z^2 = 4y^2 - 4,$

oder

$$\text{ber} \quad 6yz + 4z^2 = y^2 - 1,$$
$$\text{aher} \quad y^2 + 6yz = 4z^2 + 1,$$
$$\text{lso} \quad y = 3z + \sqrt{(13z^2 + 1)}.$$

Jetzt ist die Größe hinter dem Wurzelzeichen mit der gegebenen von einerlei Form; man setze also $z = 0$, und reduzire rückwärts, so kommt

$$z = 0,$$
$$y = 3 \cdot 0 + \sqrt{(13 \cdot 0 + 1)} = \sqrt{1} = 1,$$
$$x = y + z = 1 + 0 = 1,$$
$$v = x + y = 1 + 1 = 2,$$
$$u = v + x = 2 + 1 = 3,$$
$$t = u + v = 3 + 2 = 5,$$
$$s = 6t + u = 30 + 3 = 33,$$
$$r = s + t = 33 + 5 = 38,$$
$$q = r + s = 38 + 33 = 71,$$
$$p = q + r = 71 + 38 = 109,$$
$$n = p + q = 109 + 71 = 180.$$

Es ist also 180 die kleinste Zahl für n (0 ausgenommen), mit $13n^2 + 1$ ein Quadrat werde. Dann ist $13n^2 + 1 = 21201$ und diese Zahl das Quadrat von 649.

§. 109.

Ist c eine Zahl, welche um 1 oder 2 von einem Quadrate unterschieden ist, so läßt sich n auf einem kürzern Wege finden.

Es sei 1) c um 1 kleiner als ein Quadrat, also $c = r^2 - 1$, so kann man statt $cn^2 + 1 = m^2$ setzen

$$(r^2 - 1)n^2 + 1 = m^2.$$

Ist dieses, so muß m kleiner sein als rn, denn wäre $m = rn$, so wäre $r^2n^2 = m^2$, es ist aber nur $r^2n^2 - n^2 + 1 = m^2$. Man setze daher $m = rn - p$, so wird

$$(r^2 - 1)n^2 + 1 = (rn - p)^2,$$
$$\text{ber} \quad r^2n^2 - n^2 + 1 = r^2n^2 - 2rnp + p^2,$$
$$\text{lso} \quad -n^2 + 1 = -2rnp + p^2,$$
$$\text{ber} \quad n^2 - 1 = 2rnp - p^2,$$
$$\text{aher} \quad n^2 = 2rnp - p^2 + 1,$$
$$\text{lso} \quad n^2 - 2rnp = -p^2 + 1,$$
$$\text{olglich} \quad n = rp + \sqrt{(r^2p^2 - p^2 + 1)}.$$

Setzt man nun $p = 1$, so wird

$$n = r + \sqrt{(r^2 - 1 + 1)} = r + r = 2r.$$

Es ist also $cn^2 + 1 = (r^2 - 1) \cdot 4r^2 + 1 = m^2$, also

$$4r^4 - 4r^2 + 1 = m^2,$$

und da nun $4r^4 - 4r^2 + 1$ das Quadrat von $2r^2 - 1$ ist,
so ist $m = 2r^2 - 1$.

Es sei z. B. $c = 24$, so ist $r^2 = 25$, und daher $r = 5$, folglich $n = 10$ und $24n^2 + 1 = 24 \cdot 100 + 1 = 2401 = (2r^2 - 1)^2 = (50 - 1)^2 = 49^2$.

Setzt man $p = 0$, so wird

$$n = r \cdot 0 + \sqrt{(r^2 \cdot 0^2 - 0 + 1)} = 0 + \sqrt{1} = 1.$$

Ist nun $c = 24$, so ist $m = 5 = r$. Es sind also $n = 1$ und $m = 5$ die kleinsten Zahlen, welche $24n^2 + 1$ zum Quadrate machen.

Ist 2) c um 2 kleiner als ein Quadrat, also $c = r^2 - 2$, so ist $(r^2 - 2)n^2 + 1 = m^2$, also m kleiner als rn; ist daher $m = rn - p$, so ist

$$\begin{aligned}
(r^2 - 2)n^2 + 1 &= r^2n^2 - 2rnp + p^2, \\
\text{oder} \quad r^2n^2 - 2n^2 + 1 &= r^2n^2 - 2rnp + p^2, \\
\text{also} \quad -2n^2 + 1 &= -2rnp + p^2, \\
\text{oder} \quad 2n^2 - 1 &= 2rnp - p^2. \\
\text{Daher} \quad 2n^2 - 2rnp &= -p^2 + 1, \\
\text{oder} \quad n^2 - rnp &= \frac{-p^2 + 1}{2}, \\
\text{also} \quad n &= \frac{rp + \sqrt{(r^2p^2 - 2p^2 + 2)}}{2}.
\end{aligned}$$

Nimmt man jetzt $p = 1$, so wird

$$\begin{aligned}
n &= \frac{r + \sqrt{(r^2 - 2 + 2)}}{2} \\
&= \frac{r + r}{2} = r,
\end{aligned}$$

und da $(r^2 - 2)n^2 + 1 = m^2$,
so ist $r^4 - 2r^2 + 1 = m^2$.

Es ist aber $r^4 - 2r^2 + 1$ das Quadrat von $r^2 - 1$, folglich $m = r^2 - 1$.

Ist z. B. $c = 23$, also $r^2 = 25$ und $r = 5$, so ist

$$23n^2 + 1 = 23 \cdot 25 + 1 = 24^2.$$

3) Ist c um 1 größer, als eine Quadratzahl, also $c = r^2 + 1$, so ist $cn^2 + 1 = (r^2 + 1)n^2 + 1 = m^2$ oder $r^2n^2 + n^2 + 1$, und m ist offenbar größer als rn. Deswegen setze man $m = rn + p$, so ist

$$\begin{aligned}
m^2 &= r^2n^2 + 2rnp + p^2, \\
\text{also} \quad r^2n^2 + n^2 + 1 &= r^2n^2 + 2rnp + p^2, \\
\text{folglich} \quad n^2 + 1 &= 2rnp + p^2, \\
\text{daher} \quad n^2 - 2rnp &= p^2 - 1, \\
\text{und} \quad n &= rp + \sqrt{(r^2p^2 + p^2 - 1)}.
\end{aligned}$$

Setzt man $p = 1$, so wird $n = 2r$ und $m = 2r^2+1$.

Es sei $c = 37 = 36+1$, also $r = 6$, so ist $n = 12$ und $m = 13$ und $37.12^2+1 = 73^2$.

4) Ist c um 2 größer, als ein Quadrat, also $c = r^2+2$, so soll $(r^2+2)n^2+1 = m^2$ sein.

Es ist alsdann m wieder größer, als rn, also $m = rn+p$ und $m^2 = r^2n^2+2rnp+p^2$. Also

$$r^2n^2+2n^2+1 = r^2n^2+2rnp+p^2,$$

oder $$2n^2+1 = 2rnp+p^2,$$

also $$2n^2-2rnp = p^2-1,$$

und $$n^2-rnp = \frac{p^2-1}{2}.$$

Daher $$n = \frac{rp+\sqrt{(r^2p^2+2p^2-2)}}{2}.$$

Nimmt man $p = 1$, so wird $2p^2-2 = 0$, also $n = \frac{r+r}{2} = r$, also $m = r^2+1$.

Es sei $c = 51$, also $49+2$, so ist $r = 7 = n$ und $n = 50$. In der That ist $51.49+1 = 50^2$.

§. 110.

Zum Beschluß dieser Anfangsgründe der Algebra fügen wir noch folgende Aufgaben hinzu, theils bestimmte, theils unbestimmte, theils einfache, theils solche, worin die unbekannte Größe in höheren Potenzen vorkommt.

1) Es hat jemand 4 Gärten. Der zweite ist 4 mal so groß, als der erste und hat noch einen Überschuß von 50 Q. R. Der dritte beträgt bloß $\frac{1}{3}$ vom zweiten, der vierte aber ist doppelt so groß als der dritte. Multiplizirt man nun den Flächeninhalt des ersten mit dem des zweiten, desgleichen die Flächeninhalte des dritten und vierten mit einander und zieht man das letztere Produkt von dem erstern ab, so kommen 28800. Wie groß ist jeder der 4 Gärten?

2) Drei Personen gewinnen bei einem gemeinschaftlichen Handel, die zweite eben so viel als die dritte, weniger 200 thlr., und die dritte so viel als die erste und zweite zusammengenommen, weniger 800 thlr. Multiplizirt man nun diese 3 Gewinne mit einander und dividirt das Produkt durch 1000000, so kommt 10800, wie groß war jeder Gewinn?

3) Ein Sohn fragt den Vater nach seinem Alter. Dieser antwortet: wenn ich von deinem Alter 4 Jahre abrechne, zu dem meinigen aber noch 6 Jahre addire und jenen Rest mit

dieser Summe multiplizire, so kommt die Zahl 560. Wie du aber dein Alter mit sich selbst multiplizirst und vom Produkte das meinige abrechnest, so kommt die Zahl 146. Wie alt waren Vater und Sohn?

4) Ein Fleischer wird gefragt, wie viel Hammel er in diesem Jahre geschlachtet habe. Wenn ich, ist die Antwort, von der Zahl der in diesem Jahre geschlachteten, die Zahl dem im vorigen Jahre abziehe und diesen Rest mit der Summe der in beiden Jahren zusammen und noch mit der Zahl der in diesem Jahre geschlachteten multiplizire, so kommt die Zahl 1520000, und wenn ich die Zahl der Hammel im vorigen Jahre mit sich selbst und noch mit der Zahl der in diesem Jahre geschlachteten, nachdem 30 davon sind abgerechnet worden, multiplizire, so kommt die Zahl 5508000. Wie viel sind also in jedem Jahre geschlachtet?

5) Wie lange, fragt jemand einen Kandidaten, sind sie auf der Universität gewesen? Wenn ich, antwortet er, zu der Zahl meiner Universitätsjahre noch 3 hinzurechne und 3 davon abziehe, und jene Summe erst mit sich selbst, dann aber noch mit diesem Reste multiplizire, so kommt die Zahl 400. Wie viel Jahre hat er also studirt?

6) Eine Gesellschaft von 80 Personen besteht aus Männern, Frauen und Kindern. Multiplizirt man den Unterschied der Zahl der Männer und Frauen mit dem Unterschiede der Zahl der Männer und Kinder und das Produkt mit der Summe aller Personen, so kommt die Zahl — 12000; multiplizirt man aber die Zahl aller Personen mit der Summe der Männer und Frauen, so kommt die Zahl 5200. Wie viel waren es Männer, wie viel Frauen, wie viel Kinder?

7) Ein Gelehrter hat eine mittelmäßig starke Bibliothek. Wenn man von der Zahl seiner Bücher das Quadrat nimmt, davon den 16ten Theil nimmt und zu diesem Quotienten die 3fache Zahl der Bücher addirt, dann aber von der Summe 413 hinwegnimmt, so kommt die Zahl 20000. Wie viel Bücher waren es?

8) Jemand, der nach seinem Alter gefragt wird, antwortet: Wenn ich von meinem Alter 1 Jahr abrechne und mit dem Reste in das Alter meines Großvaters, der gerade 96 Jahre zählt, dividire, zu dem Quotienten aber die 2 Jahre, welche mein Bruder alt ist, hinzurechne, so kommt gerade so viel heraus, als wenn ich die Hälfte von meinem Alter zu der Hälfte vom Alter meines Vaters, der 51 Jahr

ählt, hinzu addire und die 16 Jahre meiner Schwester von der Summe abziehe. Wie alt ist er?

9) Es spielen 3 Personen zusammen. Am Ende des ersten Spiels hat A den 5ten Theil von dem Gelde des zweiten verloren und B und C jeder gleich viel gewonnen. Am Ende des zweiten Spiels aber hat A halb so viel gewonnen, als B anfänglich hatte und zu diesem Gewinne hat B drei Fünftheil desselben und C zwei Fünftheil beigetragen. Als nun alle drei ihr Geld überzählen, so findet sich, daß A drei Viertheil von dem anfänglichen Gelde des C, B vier Drittheile von dem anfänglichen Gelde des A und C einen Thaler mehr hat, als B anfänglich hatte. Wie viel Geld hat jeder gehabt?

10) Es sollen drei Zahlen, welche A, B und C in den Sinn genommen haben, errathen werden. Wenn man die Zahl des A durch die Summe der Zahlen von B und C dividirt, so kommt $1\frac{1}{2}$ mal so viel heraus, als wenn man die Zahl des B durch die Summe der Zahlen von A und C dividirt. Der Unterschied der Zahlen von B und C aber, durch die Zahl des A dividirt, giebt $= \frac{1}{2}$ und die Summe aller 3 Zahlen ist $= 24$.

11) Jemand verkauft ein Pferd für 144 thlr. und hat dabei so viel pCt. gewonnen, als ihm das Pferd gekostet hat, wie theuer hat er es eingekauft?

12) Jemand hinterläßt 1000 thlr. und bestimmt seine entfernten Anverwandten zu gleichtheiligen Erben. Nach seinem Tode finden sich aber noch 2 Erben mehr, als er gedacht hatte und nun bekommt jeder 25 thlr. weniger, als es sonst der Fall gewesen wäre. Auf wie viel Erben hatte der Verstorbene gerechnet?

13) Auf die Frage, wie viel jeder von 4 Personen im Vermögen habe, wird geantwortet: Das Vermögen der ersten Person verhält sich zu dem der zweiten, wie 6 zu 7, zu dem der dritten, wie 6 zu 8, zu dem der vierten, wie 6 zu 9. Multiplizirt man nun das Vermögen der ersten mit dem der dritten, das der zweiten mit dem der vierten und das der ersten auch mit dem der vierten; addirt man alle diese Produkte zusammen und dazu noch die Summe des Vermögens aller 4 Personen, so erhält man 720 thlr. Wie viel hat also jede Person?

14) Man hat 3 Zahlen. Addirt man die erste und den Kubus der dritten zusammen und zieht man von der Summe das Fünffache der zweiten ab, so bleibt 18 übrig. Welche Zahlen sind dies?

15) Man sucht 3 Zahlen. Wenn man das Neunfache der ersten, die zweite und das doppelte Quadrat der dritten addiert, so kommt zur Summe 53; wenn man aber die erste zum Fünffachen der zweiten addirt und von der Summe das Quadrat der dritten abzieht, so bleibt 1 übrig. Welche sind es?

16) Man sucht 3 Zahlen. Die Summe vom Dreifachen der ersten, dem Vierfachen der zweiten und dem Fünffachen der dritten ist = 360. Welche sind es?

17) Jemand hat Thee, das Pfund zu 3 thlr., Kaffee, das Pfund zu 16 gr. und Zucker, das Pfund zu 12 gr., zusammen für 25 thlr. Wie viel hat er von jeder Sorte?

18) Jemand hat 4 Beutel. Legt er in den ersten eine gewisse Summe, so verhält sich sein Inhalt zum Inhalte des zweiten, wie 5 zu 3. Legt er dieselbe Summe in den zweiten Beutel, so ist dieser doppelt so viel werth, als der dritte, und legt er die genannte Summe in den dritten Beutel, so ist derselbe 3 mal so viel werth, als der vierte. Was enthält jeder Beutel und wie viel wird hinzu gelegt?

19) Jemand hat 470 thlr. zu bezahlen, und will sie theils in Friedrichsd'or zu $5\frac{1}{4}$ thlr., theils in Dukaten zu $3\frac{1}{3}$ thlr. entrichten, wie viel Goldstücke jeder Art muß er gerade geben?

20) In den 3 Klassen einer Schule sind zusammen 100 Schüler. Ein Schüler der ersten Klasse zahlt monatlich 3 thlr., der zweiten Klasse $2\frac{1}{2}$ thlr. und der dritten 2 thlr. Es kommen jeden Monat 250 thlr. Schulgeld ein, wie viel sind also Schüler in jeder Klasse?

21) Es will jemand 40 Mark 10löthiges Silber aus 7löthigem, 9löthigem, 11 und 13löthigem machen, wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

22) Jemand kauft 40 Flaschen Wein für 50 thlr. und bezahlt von der einen Sorte die Flasche mit $1\frac{1}{2}$ thlr., von der andern mit 20 gr. und von der dritten mit 12 gr., wie viel Flaschen hat er von jeder Sorte?

23) In einer Gesellschaft, die aus Männern, verheiratheten Frauen und Jungfern besteht, und zusammen 36 Personen enthält, wird eine Kollekte von 100 thlr. für eine arme Familie zusammengebracht. Ein Mann giebt 4 thlr., eine Frau $1\frac{1}{2}$ thlr., eine Jungfer $\frac{1}{2}$ thlr., wie viel sind es Männer, Frauen und Jungfern?

24) Jemand hat zweierlei Sorten Hafer, von der einen kostet der Scheffel 12 gr., von der andern 20 gr. Er will so

o vermischen, daß er den Scheffel für 18 gr. geben kann, wie iel muß er von jeder Sorte nehmen?

25) An einem Baue arbeiten Maurer, Zimmerleute, Tagelöhner, zusammen 60 Personen. Ein Maurer bekommt täglich 18 gr., ein Zimmermann 16 gr., ein Tagelöhner 9 gr., wie viel arbeiten von jedem Handwerke?

26) Jemand hat Dukaten. Ordnet er sie in Reihen von Stück, so bleiben 3 übrig. Nun giebt er aber 4 Dukaten us, und wenn er die übrigen in Reihen zu 3 Stück ordnet, o bleibt 1 übrig, wie viel hatte er anfänglich Dukaten?

27) Jemand hinterläßt 200 thlr. und bestimmt, daß seine väterlichen und 8 mütterlichen Verwandten jeder in jeder amilie so viel bekommen soll, als der andere. Wie viel kann der erben?

§. III.

Auflösung der in beiden Theilen befindlichen Aufgaben.

I. Zu §. 20. Die Summe der zu addirenden Größen ist on 1) $= 5\frac{1}{24}a - 6\frac{7}{8}b - 2\frac{5}{24}c - 3\frac{1}{18}d$,

on 2) $= 6\frac{7}{8}f - 10\frac{5}{18}a - \frac{3}{4}d - 1\frac{1}{12}b + 17\frac{5}{6}c - 13\frac{1}{12}g$,

on 3) $= 79$ thlr. $+ 22$ gr. $- 9$ pf. oder 79 thlr. 21 gr. 3 pf.

Bei 4) ist die Summe aller Größen oder was er von der innahme übrig behält,

$=$ 39 thlr. — 18 gr. — 3 pf. oder 38 thlr. 5 gr. 9 pf.

Bei 5) behält er von der Waare 66 Zt. 101 Pfd. — 29 Lth. — 3 Qu. oder 66 Zt. 100 Pfd. 11 Lth. 1 Qu.

Bei 6) ist der Rest $= -7\frac{1}{12}a - 11\frac{17}{30}b + 4\frac{17}{18}c + \frac{4}{5}d + \frac{5}{12}e - 40\frac{1}{4}f$.

Bei 7) ist der Rest $=$ 11 thlr. — 11 gr. — 4 pf. oder 0 thlr. 12 gr. 8 pf.

Bei 8) ist der Rest $= 13\frac{2}{3}a - 11\frac{1}{2}b + 3\frac{1}{6}c - 6\frac{1}{2}d - 7\frac{1}{6}e + 7\frac{27}{40}f + 7g$.

Bei 9) bleibt $a - 3p + 2q - m$.

Bei 10) kommt $-4a - 4b + 2c - 2d$.

Bei 11) bleibt $32m + 4q - 6c - 2b - 2d - 5f$.

II. Berichtigung zu §. 26. S. 21. Z. 3 v. u. l. 8cd statt cd und Z. 1 v. u. 11cd statt 6cd. Eben so S. 22. Z. 14 . o. l. 8cd und 11cd statt 3cd und 6cd und Z. 18 v. o. c(2c — 11d) statt 2c(c — 3d).

III. Zu §. 33. Es kommen folgende Produkte:

ei 1) : $6aa + 5ab - 6bb - 2ad + 23bd - 2cdd$,

2) : $25mm - 9qq + 24pq - 16pp - 12qr + 16pr - 4rr$,

bei 3): $-3dd+2bcd-6ce-19df+9dg+3ef-6$
$-5eg+5fg-gg$,

4): $2\frac{1}{4}aa-5ab+2\frac{2}{3}bb+1\frac{1}{4}ac-1\frac{4}{5}bc-3\frac{2}{5}ad+\frac{1}{6}$
$+4\frac{5}{9}bd-\frac{7}{8}cd+\frac{5}{6}dd$,

5): $14aa+5ab-24bb-22ac+18af+41bc-12$
$-47bf+32cf-20ff$,

6): $25ff-9ee+3ce-\frac{1}{4}cc-1\frac{1}{2}ed+\frac{1}{4}cd-\frac{1}{15}dd$,

7): $6aab-3acd+4acb+3aef-6ccd-6afb-3g$
$+2cef+9cfd+6abgm-2cg-3efg-9cdg$
$+3fg+3efgm-3ggm$,

oder mit Anwendung der Klammer
$a[2b(3(a-f)+2c)-3(cd-ef+g(2bm-1))]+$
$c[bcd+f(2c+9d)-g(2+9dm)]+3g[f(1-e+cm$
$-m]$,

8): $4bb-9\frac{5}{6}bq+4\frac{1}{6}bp-6qq-5\frac{1}{12}bc-5pq+6\frac{1}{24}c$
$+pp-3pc+1\frac{1}{4}cc$,

9): $18qq-12qm+3pq-6mm-42rq+13pm+18$
$-6pp-7pr+24rr$,

10): $17\frac{1}{2}mm+13\frac{7}{8}bm-17\frac{17}{24}mc-1\frac{11}{12}bb+37md+7\frac{5}{16}$
$+4\frac{7}{32}bd-7\frac{1}{2}cc-1\frac{5}{9}\frac{3}{2}cd+13\frac{3}{12}\frac{3}{2}db$,

11): $18\frac{5}{12}mm-6\frac{1}{120}mb+\frac{3}{10}bb+5\frac{1}{8}mc-14\frac{2}{5}md-\frac{17}{32}$
$+3\frac{8}{45}bd+\frac{15}{64}cc-2\frac{2}{3}cd+1\frac{7}{9}dd$,

12): $1\frac{1}{4}pp-\frac{83}{96}pq-\frac{1}{2}qq-pr+\frac{5}{24}qs+3\frac{11}{48}qr-3$
$+2\frac{13}{72}qs-5\frac{1}{12}rs-1\frac{17}{18}ss$.

IV. Zu §. 33. Es kommen

bei 1): $5a+3b-4c$,
2): $3p+3m-4q$,
3): $2a+3b-4c+d$,
4): $6a-2m+3q-4p$,
5): $3ab+2pq-3mr$,
6): $mr+pq-cd+fg$,
7): $3q-4p+8m+2r$,
8): $5f-3c+2d+8e$,
9): $2b+6c-4e+3d$,
10): $2q-3r+10m-4p$.

V. Zu §. 35.

Die Formel 1) iſt $= p(q-r+m-3a+4e)$
2) $= m[q(1-d)-p(r-c-e)]$,
3) $= a[b(c-d+1)-qr+ms]$,
4) $= e[f-g(h-d+1)+1]$,
5) $= 3(a-2b+c-3f)$.

e Formel 6) ist $= a[3(1+bc)-2b-mf+g]$,
oder $= a[3-b(2-3c)-mf+g]$,
7) „ $= a[1-m(1-p+g)+3p]$,
oder $= a[1-m(1+g)+p(m+3)]$,
8) „ $= a-b[m(1-c)+c(d(e-f)+g)-q]$.

VI. Zu §. 36.

Formel 1) ist $= a+mbd-mcd$,
2) „ $= a+qr-3q+2cq-f$,
3) „ $= 3mp-m+6mc-6mf+6md-me$,
4) „ $= a-apq+apr+am$,
5) „ $= ac-adm-4aad+abd+ard+ac$,
6) „ $= mr-mqc+mqde+mqdf+9mh+9mm$,
7) „ $= \frac{aa-ab-pq+pr-m}{a-b}$,
8) „ $= \frac{qgh-qgm-mr-cd+ef}{gh-gm}$,
9) „ $= \frac{qq+qr-m-fg+fh+e}{q+r}$,
10) „ $= \frac{ce-ed-cf+df-a-bc+bd+e}{e-f}$,
11) „ $= \frac{mmqr-qsmm-mqr+mqs-p-qc+q-a}{mm-m}$,
12) „ $= \frac{mcpq-mcpr+mmc+mpq-mpr-mmm+qmm-qm}{pq-pr+m}$.

VII. Zu §. 63.

Es kommt bei I.

) $= 216$; 2) $= 54700816$; 3) $= 40$; 4) $= \frac{3}{4}$; 5) $= 1$;
) $= 1$; 7) $= 1$; 8) $= \frac{1}{8}$; 9) $= \frac{1}{161051}$; 10) $= \frac{1}{q^m}$;
1) $= \sqrt[4]{8^3} = \sqrt[4]{512} = 8\sqrt{8}$; 12) $\sqrt[q]{m^p}$; 13) $= \frac{1}{\sqrt{16}}$
$= \frac{1}{4}$; 14) $= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; 15) $\sqrt[4]{216}.\sqrt{8} = \sqrt[4]{216}.\sqrt[4]{64} =$
$\sqrt[4]{216.64} = \sqrt[4]{13824}$.

Es kommt bei II.

) $= p^7$; 2) $= p^2$; 3) $= p^3$; 4) $= p^{-3}$; 5) $= p^{-5}$;
) $= a^{q-b}$; 7) $= q^{\frac{17}{12}} = \sqrt[12]{q^{17}}$; 8) $= q^{\frac{11}{3}} = \sqrt[3]{q^{11}}$;
) $= q^{-3\frac{1}{6}} = q^{-\frac{19}{6}} = \frac{1}{q^{\frac{19}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{q^{19}}}$; 10) $= q^{-\frac{5}{6}}$
$= \frac{1}{q^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{q^5}}$; 11) $= q^0 = 1$; 12) $m^{\frac{6}{3}}.m^{\frac{4}{3}} = m^{\frac{10}{3}}$

$= \sqrt[12]{m^{10}}$; 13) $= \frac{1}{m^{\frac{5}{6}}} \cdot m^{\frac{5}{6}} = m^{-\frac{5}{6}} \cdot m^{\frac{5}{6}} = m^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{m^7}$;

14) $= \frac{1}{m^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{m^{\frac{4}{3}}} = m^{-\frac{3}{4}} \cdot m^{-\frac{4}{3}} = m^{-\frac{25}{12}} = \frac{1}{m^{\frac{25}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{m^{25}}}$.

Es kommt bei III.

1) $= a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; 2) $= a^8$; 3) $= a^{-5}$; 4) $= a^{-2}$;
5) $= a^2$; 6) $= a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$; 7) $= a^{-\frac{19}{12}} = \frac{1}{a^{\frac{19}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{a^{19}}}$;
8) $= a^{-\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{a^5}$; 9) $= a^{\frac{35}{8}} = \sqrt[8]{a^{35}}$; 10) $= a^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{10}{24}} = \sqrt[24]{a^{10}}$; 11) $= a^{-2\frac{1}{3}} = a^{-\frac{7}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^7}}$;

12) $= a^{2\frac{5}{9}} = a^{\frac{23}{9}} = \sqrt[9]{a^{23}}$; 13) $= a^{p-q}$; 14) $= a^{-(m+n)}$;

15) $= a^{\frac{p}{q}-m} = a^{\frac{p-qm}{q}} = \sqrt[q]{a^{p-qm}}$; 16) $= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$; 17) $= a^{-\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{g}\right)} = a^{-\left(\frac{bg+cd}{cg}\right)} = \frac{1}{a^{\frac{bg+cd}{cg}}} = \frac{1}{\sqrt[cg]{a^{bg+cd}}}$; 18) $= \frac{a^{\frac{b}{m}}}{a^{\frac{b}{q}}} = a^{\frac{b}{m}-\frac{b}{q}} = a^{\frac{bq-bm}{mq}} = a^{\frac{b(q-m)}{mq}} = \sqrt[mq]{a^{b(q-m)}}$; 19) $= \frac{a^{\frac{m}{p}}}{a^{\frac{n}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{p}+\frac{n}{q}\right)} = a^{-\frac{mq+np}{pq}} = \frac{1}{a^{\frac{mq+np}{pq}}} = \frac{1}{\sqrt[pq]{a^{mq+np}}}$;

20) $= \frac{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}}{a^{-3}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}}}{a^{-3}} = a^{2\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{a^7}$; 21) $= \frac{\frac{1}{a^{-\frac{1}{3}}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{3}}}{1} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{-\frac{1}{2}}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$; 22) $= \frac{8a^4}{2a^3} = 4a$;

23) $= \frac{\frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}}{\frac{2}{4}a^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{6}} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{8}{9 \cdot a^{\frac{1}{6}}} = \frac{8}{9\sqrt[6]{a}}$;

24) $= \frac{\frac{15}{a^{\frac{1}{4}}}}{\frac{5}{a^{\frac{1}{2}}}} = \frac{15}{5} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} = 3 \cdot a^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{a^{\frac{1}{4}}}$.

Es kommt bei IV.

$) = a^m b^m$; 2) $= \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{q^{-\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{q^{\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{q^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{q^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} =$

$\sqrt{\frac{q}{p}} = \sqrt{\frac{q}{p}}$; 3) $= 8^{-m} \cdot q^{-m} \cdot p^{-m} = \frac{1}{8^m} \cdot \frac{1}{q^m} \cdot \frac{1}{p^m}$

$= \frac{1}{8^m \cdot q^m \cdot p^m} = \frac{1}{(8 \cdot q \cdot p)^m}$; 4) $= 9^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a}$

$= 3\sqrt{a}$; 5) $= \frac{m^3}{n^3}$; 6) $= \frac{(3a)^{-2}}{(4b)^{-2}} = \frac{3^{-2} \cdot a^{-2}}{4^{-2} \cdot b^{-2}} =$

$\frac{\frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{a^2}}{\frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{1}{3^2 \cdot a^2}}{\frac{1}{4^2 \cdot b^2}} = \frac{4^2 \cdot b^2}{3^2 \cdot a^2} = \frac{16b^2}{9a^2}$; 7) $= \frac{p^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{2}{3}}} =$

$\sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{q^2}}$; 8) $= \frac{5^3 \cdot p^6 \cdot m^3}{6^5 \cdot q^6 \cdot r^5} = \frac{3125 \cdot p^3 \cdot m^5}{7776 \cdot q^5 \cdot r^5}$.

Es kommt bei V.

$) = a^6$; 2) $= a^{\frac{2}{1}} = \sqrt{a^3}$; 3) $= a^{-32} = \frac{1}{a^{32}}$;

$) = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$; 5) $= a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; 6) $= a^{-2} = \frac{1}{a^2}$;

$) = a^{-\frac{9}{10}} = \frac{1}{a^{\frac{9}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{a^9}}$; 8) $= a^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{a^5}$.

Bei VI.

$) = a^{\frac{1}{3}}$; 2) $= (ab)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$; 3) $= \frac{p^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}}$; 4) $= a^{\frac{2}{3}}$;

$) = a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} b$; 6) $= a^{-\frac{3}{7}} b^{\frac{6}{28}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{7}}} \cdot b^{\frac{3}{14}} = \frac{b^{\frac{3}{14}}}{a^{\frac{3}{7}}}$;

$) = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$; 8) $= \frac{1}{a^{-\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}} = 1 \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}}{1} = a^{\frac{2}{3}}$;

$)) = \frac{1}{a^{\frac{3}{16}}} = a^{-\frac{3}{16}}$; 10) $= \frac{1}{a^{-\frac{2}{15}}} = a^{\frac{2}{15}}$.

Bei VII.

$t) = \sqrt{a}\sqrt{b}$; 2) $= \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}$; 3) $= a^{\frac{3}{4}} b^2 = b^2 \sqrt[4]{a^3}$;

4) $= \frac{p^{\frac{3}{5}}}{q^{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{p^3}}{\sqrt[5]{q^2}}$; 5) $= 2\sqrt[2]{p}$; 6) $= 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$; 7) $= \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$.

VIII. Zu §. 80.

1) $\sqrt{5625} = 75$; 2) $\sqrt{177241} = 421$; 3) $\sqrt{339889} = 583$; 4) $\sqrt{748225} = 865$; 5) $\sqrt{3286969} = 1813$; 6) $\sqrt{104734756} = 10234$; 7) $\sqrt{14408161156} = 120034$; 8) $\sqrt{1066151242116} = 1032546$; 9) $\sqrt{11} = 3{,}3166247$; 10) $\sqrt{56} = 7{,}4833147$; 11) $\sqrt{855} = 29{,}2403833$; 12) $\sqrt{467} = 21{,}61018204$.

IX. Zu §. 246. S. 266.

a) = 1 thlr. 12 gr. $4\frac{49}{83}$ pf.; b) = 8 gr. $1\frac{27}{34}$ pf.; c) = 2 thlr. 9 gr. $3\frac{11}{17}$ pf.

X. Zu §. 247. S. 267 u. s. w.

b) = 59 Wspl. $7\frac{1}{17}$ Schfl.; c) = $113\frac{49}{127}$ Ell.; e) = 21 Zt. $9\frac{165}{181}$ Pfd.; f) = $4544\frac{448}{583}$ Ellen.

XI. Zu §. 248. S. 270 u. s. w.

c) = 1 thlr. $8\frac{14023}{34809}$ gr.; d) = 1 thlr. $21\frac{62247}{94228}$ gr.; e) = 5116 thlr. $\frac{1}{16}$ gr.; g) = 106 Zt. $90\frac{7}{8}$ Pfd.; h) = $294\frac{5}{12}$ Ellen.

XII. Zu §. 249.

a) = 84 Zt. $81\frac{159}{196}$ Pfd.; b) = $309\frac{3}{8}$ Wspl.; c) = $54\frac{1}{2}$ Ank. = 9 Oxhoft und $\frac{1}{2}$ Anker.

XIII. Zu §. 250.

b) = $10\frac{116333}{343772}$ gr.; c) = 1 thlr. $4\frac{340}{4607}$ gr.; d) = 8937 thlr. $14\frac{7}{48}$ gr.

XIV. Zu §. 286.

1) Der wirkliche Gewinn = 2200 und der Verkaufspreis des Restes = 12 gr.

2) Der mögliche Gewinn = $6722\frac{2}{9}$, der wirkliche = $4033\frac{1}{3}$ und der Verkaufspreis des ersten Theils = 5 gr. $1\frac{1}{15}$ pf.

3) Die ganze Waare ist = $266\frac{2}{3}$ Zt., der Verkaufspreis des ersten Theils = 8 gr. für 1 Pfd.; der wirkliche Gewinn = 5500 thlr. und der mögliche = $7333\frac{1}{3}$ thlr.

4) Die ganze Waare kommt = 75 Wspl., der mögliche Gewinn = 900 thlr., der wirkliche = 600 thlr. Da die ganze Waare kleiner, als der zuerst verkaufte Theil ist, so läßt sich die Aufgabe so erklären. Er kauft 25 Wspl., den Schfl. zu 21 gr., seine Ausgabe also 1575 thlr. Diese verkauft er wieder, den Schfl. zu 30 gr., außerdem aber noch 25 Wspl.

ie ihm von einem andern der Scheffel zu 33 gr. angerechnet ind, die er aber auch nur zu 30 gr. verkauft. Hätten die 100 Wspl. ganz ihm gehört, so hätte er 3000 thlr. eingenommen; aber dem Andern muß er die 25 Wspl. zu 33 gr. bezahlen; dies macht 825 thl., welche also als negativ von 3000 thlr. abzuziehen sind. Er nimmt also nur ein 2175 thlr., olglich ist sein wirklicher Gewinn = 600 thlr. Hätte er aber ine 75 Wspl. zu 33 gr. verkaufen können, so würde die Einahme 2475 thlr., also der Gewinn 900 thlr. betragen haben.

5) Der Preis des Restes kommt = 42 thlr., der mögliche Gewinn = 3600 thlr.

6) Der Preis des ersten Theils der Waare ist = 6 gr., es Restes = 8 gr., der mögliche Gewinn = 11000 thlr.

7) Die ganze Waare beträgt 200 Zt., der Preis des ersten Theils 8 gr. für das Pfd., des Restes 9 gr.

8) Der Einkaufspreis ist = 85 thlr., der Verkaufspreis es ersten Theils = 80 thlr. und des Restes = 100 thlr. ür den Wspl.

9) Der Einkaufspreis ist = $2\frac{1}{5}$ thlr., der mögliche Gewinn = 504 thlr. und der wirkliche = 448 thlr.

10) Die Waare beträgt $137\frac{1}{2}$ Zt., der wirkliche Gewinn $1291\frac{2}{3}$ thlr., und der mögliche $2520\frac{5}{6}$ thlr.

11) Der zuerst verkaufte Theil der Waare beträgt $53\frac{1}{3}$ Wspl., er wirkliche Gewinn 1920 thlr. und der mögliche 2240 thlr.

12) Der Preis des Restes ist 66 thlr., der mögliche Gewinn 15000 thlr. und der wirkliche 12000 thlr.

13) Der Preis des ersten Theils der Waare ist 1 thlr. $\frac{3}{5}$ gr., des Restes 1 thlr. 17 gr.

14) Er kauft $518\frac{2}{11}$ Ztn., das Pfd. zu $8\frac{12}{15}$ gr.

15) Er kauft 440 Wspl. und der mögliche Gewinn beträgt 4840 thlr.

16) Er kauft $436\frac{4}{11}$ Ztn. und der wirkliche Gewinn beträgt $7666\frac{2}{3}$ thlr.

17) Der Verkaufspreis des ersten Theils ist $3\frac{13}{550}$ gr. und es Restes $5\frac{144}{275}$ gr. für das Pfd.

18) Die eingekaufte Waare beträgt 1000 Ztn. und der Verkaufspreis des ersten Theils 5 gr. für das Pfd.

§. 112.

Auflösung der im zweiten Theile vorkommenden Aufgaben:

I. Zu S. 10. §. 5.

1) Die jährliche Ausgabe ist 300 thlr.